DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

3.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt lineāro izomorfismu un lineāro attēlojumu struktūras pamatfaktus.

Lekcijas kopsavilkums:

- dimensija ir vienīgais LT invariants,
- eksistē bāzes, attiecībā uz kurām LA matrica ir normālajā formā,
- var definēt LT elementus - *īpašvektorus*, kurus LA pārveido vienkāršā veidā.

Svarīgākie jēdzieni: lineārs izomorfisms (LI), izomorfas LT, LO invarianta apakštelpa, LO īpašvektors, LO īpašvērtība.

Svarīgākie fakti un metodes: LI īpašības, LT izomorfisms ar k^n, LT klasifikācija ar precizitāti līdz izomorfismam, LA attēlojuma struktūras teorēma, invariantu apakštelpu īpašības, teorēma par īpašvērtību ekvivalentajām definīcijām, īpašvērtību un īpašvektoru atrašanas algoritmi.

1. Lineāri izomorfismi

1.1. Pamatfakti

Bijektīvu LA sauc par *lineāru izomorfismu (LI)*.

Ja $\exists$ LI $f : L \to V$, tad saka, ka L un V ir *izomorfas* LT ($L \simeq V$).

1.1. piezīme. Par LI var domāt kā par funkciju, kas pārapzīmē elementus, operāciju tabulas saglabājas.

1.1. piemērs. id, vektoru simetrija un rotācija, matricas transponēšana, $f : k^4 \longrightarrow \mathcal{M}at(2,k)$ - $f((x,y,z,t)) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$.

1.1. teorēma.

1. $\left\{ \begin{array}{l} f \in Hom(L,V) \text{ - LI} \\ g \in Hom(V,Z) \text{ - LI} \end{array} \right. \Longrightarrow g \circ f \in Hom(L,Z)$ ir LI.
2. $f \in Hom(L,V)$ - LI $\Longleftrightarrow$ $f^{-1} \in Hom(V,L)$- LI.

3. f - LI $\iff$ f matricas attiecībā uz $\forall$ bāzēm ir invertējamas.
4. f - LI ar matricu $\mathbf{F}$ $\Longrightarrow$ f^{-1} matrica ir $\mathbf{F}^{-1}$.
5. $\forall$ LT L: $\mathrm{id} : L \to L$ ir LI.

PIERĀDĪJUMS

1. Agrāk tika pierādīts, ka $g \circ f$ ir LA. Bijektīvu funkciju kompozīcija ir bijektīva funkcija $\Longrightarrow$ $g \circ f$ ir LI.

2. $f : L \to V$ ir bijektīva funkcija $\Longrightarrow$ $f^{-1} : V \to L$ ir bijektīva funkcija. Jāpierāda, ka f^{-1} ir LA.

$$\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V\ \exists\ \mathbf{l}, \mathbf{l}' \in L : \begin{cases} f(\mathbf{l}) = \mathbf{v}, f^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{l} \\ f(\mathbf{l}') = \mathbf{v}', f^{-1}(\mathbf{v}') = \mathbf{l}'. \end{cases}$$

$$f^{-1}(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = f^{-1}(\mathbf{v}) + f^{-1}(\mathbf{v}) = f^{-1}(f(\mathbf{l}) + f(\mathbf{l}'))) = \\ f^{-1}(f(\mathbf{l} + \mathbf{l}')) = (f^{-1} \circ f)(\mathbf{l} + \mathbf{l}') = \mathrm{id}(\mathbf{l} + \mathbf{l}') = \mathbf{l} + \mathbf{l}' = \\ f^{-1}(\mathbf{v}) + f^{-1}(\mathbf{v}).$$

$$f^{-1}(\lambda \mathbf{v}) = f^{-1}(\lambda f(\mathbf{l})) = f^{-1}(f(\lambda \mathbf{l})) = \lambda \mathbf{l} = \lambda f^{-1}(\mathbf{v}).$$

3. $\exists$ bāze: f matrica $\mathbf{F}$ nav invertējama $\Longrightarrow$ $\mathcal{N}ull(\mathbf{F}) \neq \{\mathbf{0}\}$ $\Longleftrightarrow$ $Ker(f) \neq \{\mathbf{0}\}$ $\Longrightarrow$ f nav injektīvs.

f nav LI $\Longrightarrow$ f nav injektīvs vai f nav sirjektīvs.

f nav injektīvs $\Longleftrightarrow$ $Ker(f) \neq \{\mathbf{0}\}$ $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{N}ull(\mathbf{F}) \neq \{\mathbf{0}\}$ $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{F}$ nav invertējama.

f nav sirjektīvs $\Longrightarrow$ $\forall$ $\mathbf{F}$: $\dim Im(f) = \dim\langle \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_n \rangle < n$. Bet $\dim\langle \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_n \rangle = r(\mathbf{F}) < n$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{F}$ nav invertējama.

4. f^{-1} matrica ir $\mathbf{G}$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{GF} = \mathbf{E}_n$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}$.

5. id matrica ir $\mathbf{E}_n$. ■

1.2. Lineāru telpu klasifikācija

Kad divus matemātiskus objektus var uzskatīt par līdzīgiem pēc struktūras ignorējot nebūtiskas detaļas (apzīmējumus, attēlošanas veidu u.c)?

- skaitļi - vienādība,
- kopas - elementu skaits,
- ğeometriskas figūras - kongruence, varbūt līdzība.

Kad divas LT uzskatīt par līdzīgām pēc struktūras?

- laukiem jābūt vienādiem ($\mathbb{Q}$-lineāra telpa un $\mathbb{C}$-lineāra telpa ir dažādas),
- dimensijām jābūt vienādām (plakne un telpa ir dažādas),
- vai ar to pietiek?

1.2. teorēma. L - k-lineāra LT, $\dim(L) = n$. Tad

$$\boxed{L \simeq k^n.}$$

PIERĀDĪJUMS Uzrādīsim LI $L \to k^n$.

Izvēlēsimies LT L bāzi $\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$.

LT k^n izvēlēsimies kanonisko bāzi $\mathcal{B}_{k^n} = \{\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_n\}$,kur

$$\mathbf{s}_i = (0, ..., \underbrace{1}_{i-\text{tajā vietā}}, ..., 0)$$

Definēsim $f : L \to k^n$ šādi:

1. definēsim funkciju $f_0 : \mathcal{B}_L \to \mathcal{B}_{k^n}$:
$$f_0(\mathbf{e}_i) = \mathbf{s}_i.$$
2. turpināsim f_0 līdz LA $f : L \to k^n$:
$$f(\mathbf{l}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{s}_i.$$

Jāpierāda, ka f ir bijektīva funkcija.

<u>Sirjektivitāte</u>

$\forall\ w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{s}_i \in k^n$ izpildās $w = f\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{e}_i\right) \Longrightarrow$ $w \in Im(f)$.

Injektivitāte

$f(\mathbf{l}) = f(\mathbf{l}') \implies f(\mathbf{l} - \mathbf{l}') = \mathbf{0}$.

$\mathbf{l} - \mathbf{l}' = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{e}_i \implies f\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{s}_i = \mathbf{0} \implies$
$\forall\ i\ \gamma_i = 0 \implies \mathbf{l} - \mathbf{l}' = \mathbf{0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{e}_i \mathbf{l} = \mathbf{l}'$. ■

1.3. teorēma. k - lauks, $n, m \in \mathbb{N}$. Tad

$$n \neq m \implies k^n \not\cong k^m$$

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka $n > m$.

$f \in \mathcal{H}om(k^n, k^m) \implies \dim Im(f) + \dim Ker(f) = \dim(k^n) = n$
$\implies \underbrace{\dim Im(f)}_{\leq m < n} \leq n \implies \dim Im(f) < n \implies \dim Ker(f) > 0$

$\implies f$ nav injektīvs. ■

1.2. piezīme. Seko, ka k^n var uzskatīt par LT struktūras etalonu.

1.4. teorēma. L, V - k-lineāras LT. Tad

$$L \simeq V \iff \dim L = \dim V.$$

PIERĀDĪJUMS Apzīmēsim $\dim L = n$, $\dim V = m$. Saskaņā ar teorēmu par LT izomorfismu ar vektoru telpu $\begin{cases} L \simeq k^n \\ V \simeq k^m \end{cases}$.

$$n = m \implies \begin{cases} \exists\ \varphi : L \to k^n \\ \exists\ \psi : V \to k^n \end{cases} \implies \psi^{-1} \circ \varphi : L \to V \text{ ir LI:}$$

$$\begin{tikzcd}
& k^n \arrow[dr, bend right, "\psi^{-1}"'] & \\
L \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\psi^{-1}\circ\varphi"] & & V \arrow[ul, bend right, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

$n \neq m \implies L \not\simeq V$ izmantojot tādu pašu argumentāciju kā iepriekšējā teorēmā. ■

2. Lineāro attēlojumu un operatoru struktūra

2.1. Lineārā attēlojuma struktūra

2.1. teorēma. $f : L \to V$ - LA.

1. LT L un V eksistē sadalījumi tiešajās summmās

$$L = Ker(f) \oplus L_1,$$

$$T = V_0 \oplus Im(f)$$

   tādi, ka f sašaurinājums uz L_1 ir izomorfisms uz $Im(f)$.

2. $\exists$ tādas L un V bāzes, attiecībā uz kurām f matrica ir normālajā formā

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_n & \mathbf{O}_{nm} \\ \hline \mathbf{O}_{ln} & \mathbf{O}_{lm} \end{array}\right], \text{ kur } \begin{cases} n = \dim L_1 = \dim Im(f) \\ m = \dim Ker(f) \\ l = \dim T_0. \end{cases}$$

PIERĀDĪJUMS

1. Saskaņā ar agrāk pierādītu teorēmu $\exists$ papildinošās apakštelpas $\begin{cases} L_1 = Ker(f)^p \\ T_0 = Im(f)^p \end{cases}$ tādas, ka

$$\begin{cases} Ker(f) \oplus L_1 = L, \\ Ker(f) \cap L_1 = \{\mathbf{0}_L\} \end{cases} \begin{cases} T_0 \oplus Im(f) = T \\ T_0 \cap Im(f) = \{\mathbf{0}_T\} \end{cases}$$

Pierādīsim, ka f sašaurinājums uz L_1 ir LI $L_1 \to Im(f)$.

<u>Injektivitāte</u> $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}') \implies f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} - \mathbf{x}' \in Ker(f)$.

$$\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in L_1 \implies \begin{cases} \mathbf{x} - \mathbf{x}' \in L_1 \\ \mathbf{x} - \mathbf{x}' \in Ker(f) \end{cases} \implies \mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{0},$$

jo $Ker(f) \cap L_1 = \{\mathbf{0}\}$.

<u>Sirjektivitāte</u> $\forall\ \mathbf{y} \in Im(f)\ \exists\ \mathbf{x} \in L$ tāds, ka $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$.

$$L = Ker(f) \oplus L_1 \implies \mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{x}_0}_{\in Ker(f)} + \underbrace{\mathbf{x}_1}_{\in L_1}.$$

$$\Longrightarrow f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}.$$

2. Izvēlēsimies L_1 bāzi $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, $Ker(f)$ bāzi $\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{e}_{n+1}, ..., \mathbf{e}_{n+m}\}$
$\Longrightarrow$ $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_0$ ir bāze telpai L.

Definēsim $\mathbf{t}_i = f(\mathbf{e}_i)$, $1 \leq i \leq n$. Kopa $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_n\}$ veido bāzi apakštelpai $Im(f)$ - tas tika agrāk pierādīts teorēmā par kodola un attēla dimensiju summu.

Izvēlēsimies jebkuru bāzi $\mathcal{B}_4$ telpai T_0 un izveidosim bāzi $\mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4$ telpai T.

Pārbaudīsim, ka attiecībā uz bāzēm $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ un $\mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4$ dotā f matrica ir pareiza:

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{t}_i, \forall\ 1 \leq i \leq n, \\ f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0}, \forall\ n+1 \leq i \leq n+m. \blacksquare \end{cases}$$

2.2. Lineāra operatora struktūra

Pētīsim LO. Apskatīsim $f \in \mathcal{E}nd(L)$. Iepriekšējās sadaļas teorēma ir spēkā, bet tai nav lielas nozīmes, jo parasti LO tiek uzdoti attiecībā uz vienu bāzi.

2.2.1. Invariantās apakškopas

$f : A \longrightarrow A$ - funkcija. $S \subseteq A$ sauc par f*-invariantu apakštelpu*, ja

$$\forall\ s \in S :\ f(s) \in S$$

Simboliski to apzīmē kā $f(S) \subseteq S$.

2.1. piemērs. f - A permutācija, invariantās apakškopas - cikli.
$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : f(x) = x + 1$, invariantas apakškopas ir
$\mathbb{N}_m = \mathbb{N} \backslash \{1, ..., m - 1\}$.

2.2.2. Invariantās apakštelpas

$f \in \mathcal{E}nd(L)$. $V \leq L$ sauc par *invariantu apakštelpu* (*f-invariantu apakštelpu, IA*), ja

$$\mathbf{v} \in V \implies f(\mathbf{v}) \in V, \text{ citiem vārdiem - } f(V) \subseteq V.$$

Visu f-invariantu apakštelpu kopu apzīmēsim ar $\mathcal{I}nv(f, L)$.

2.2. piemērs. $\forall\ f \in \mathcal{E}nd(L)$ $\exists$ vismaz divas IA - L, $\{\mathbf{0}\}$.
$L = \mathbb{R}^2$, f - simetrija attiecībā uz x-asi - $\langle(1, 0)\rangle$ ir IA,
f - rotācija par $\alpha \neq 0$ - nav citu IA.

2.2. teorēma. L - LT, $f \in \mathcal{E}nd(L)$.

1. $V \in \mathcal{I}nv(f) \implies f$ sašaurinājums uz V ir LA $V \to V$.
2. $V, V' \in \mathcal{I}nv(f, L) \implies \begin{cases} V \cap V' \in \mathcal{I}nv(f, L) \\ V + V' \in \mathcal{I}nv(f, L). \end{cases}$
3. $V \in \mathcal{I}nv(f, L) \implies \exists\ L$ bāze, attiecību uz kuru f matrica ir

bloku augšēji trijstūrveida formā

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{array}\right], \text{ kur } \mathbf{A} \text{ ir } \dim V \times \dim V \text{ matrica.}$$

4. $Ker(f), Im(f) \in \mathcal{I}nv(f)$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\mathbf{v} \in V \implies f(\mathbf{v}) \in V \implies f(V) \subseteq V \implies f$ sašaurinājums uz V ir korekti definēta funkcija. LA aksiomas izpildās.

2. $\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \in V' \implies f(\mathbf{v}) \in V \cap V'$.

$$\mathbf{v} \in V, \mathbf{v}' \in V' \implies f(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \underbrace{f(\mathbf{v})}_{\in V} + \underbrace{f(\mathbf{v}')}_{\in V'} \in V + V'.$$

3. Izvēlēsimies V bāzi $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m\}$.
Papildināsim to līdz L bāzei $\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m, \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{n-m}\}$.

$$\forall\ i \in \{1, ..., m\} :\ f(\mathbf{e}_i) \in \langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m \rangle \implies$$

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = \underbrace{f_{11}\mathbf{e}_1 + ... + f_{m1}\mathbf{e}_m}_{\mathbf{A}\text{ bloks}} + \underbrace{0 \cdot \mathbf{g}_1 + ... + 0 \cdot \mathbf{g}_{n-m}}_{\mathbf{O}\text{ bloks}} \\ f(\mathbf{e}_2) = \underbrace{f_{12}\mathbf{e}_1 + ... + f_{m2}\mathbf{e}_m}_{\mathbf{A}\text{ bloks}} + \underbrace{0 \cdot \mathbf{g}_1 + ... + 0 \cdot \mathbf{g}_{n-m}}_{\mathbf{O}\text{ bloks}} \\ ... \\ f(\mathbf{e}_m) = \underbrace{f_{1m}\mathbf{e}_1 + ... + f_{mm}\mathbf{e}_m}_{\mathbf{A}\text{ bloks}} + \underbrace{0 \cdot \mathbf{g}_1 + ... + 0 \cdot \mathbf{g}_{n-m}}_{\mathbf{O}\text{ bloks}} \end{cases}$$

$\implies$ attiecībā uz $\mathcal{B}_L$ f matrica ir norādītajā formā, kur $\mathbf{A}$ ir $m \times m$ matrica.

4. $\mathbf{l} \in Ker(f) \iff f(\mathbf{l}) = \mathbf{0} \implies f(f(\mathbf{l})) = \mathbf{0} \implies f(Ker(f)) \subseteq Ker(f)$.

$\mathbf{l} \in Im(f) \implies f(\mathbf{l}) \in Im(f) \implies f(Im(f)) \subseteq Im(f)$. ■

2.2.3. Īpašvektori un īpašvērtības

L - LT, $f \in \mathcal{E}nd(L)$.

$\mathbf{l} \in L, \mathbf{l} \neq \mathbf{0}$, sauc par f *īpašvektoru*, ja $\langle \mathbf{l} \rangle$ ir f-invarianta apakštelpa. Citiem vārdiem, sakot:

- $\exists\ \lambda \in k : f(\mathbf{l}) = \lambda \mathbf{l}$ (bezkoordinātu formā),
- $\begin{cases} \mathbf{l} \sim \mathbf{c} \\ f \sim \mathbf{F} \end{cases} \implies \mathbf{F}\mathbf{c} = \lambda \mathbf{c}$, attiecībā uz $\forall\ L$ bāzi (koordinātu formā).

Šajos terminos λ sauc par f *īpašvērtību*, kas atbilst $\mathbf{l}$.

$\forall$ īpašvektoram $\mathbf{l}$ īpašvērtība ir noteikta viennozīmīgi.

Visu īpašvektoru kopu ar īpašvērtību λ apzīmē ar L^λ.

$f(\mathbf{l}) = \lambda \mathbf{l} \implies f(c\mathbf{l}) = cf(\mathbf{l}) = c\lambda \mathbf{l} = \lambda(c\mathbf{l}) \implies$

$$\mathbf{l} \in L^\lambda \implies c\mathbf{l} \in L^\lambda.$$

Visu f īpašvērtību kopu sauc par f *spektru* ($\mathcal{S}pec(f)$).

2.3. piemērs. $L = \mathbb{R}^2$, f - simetrija attiecībā uz x-asi. $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 \implies \mathbf{e}_1 \in L^1$, $f(\mathbf{l}_2) = -\mathbf{e}_2 \implies \mathbf{e}_2 \in L^{-1}$.

2.3. teorēma. L - LT, $f \in \mathcal{E}nd(L)$. Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.

1. $\lambda \in \mathcal{S}pec(f)$.
2. $Ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}) \neq \{\mathbf{0}\}$.
3. $\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, kur $\mathbf{F}$ ir f matrica attiecībā uz patvaļīgu L bāzi.

PIERĀDĪJUMS

$\underline{1. \iff 2.}$

$\lambda \in \mathcal{S}pec(f) \iff \exists\, \mathbf{l} \in L: \; f(\mathbf{l}) = \lambda\mathbf{l} = \lambda \cdot \mathrm{id}(\mathbf{l}) \iff$

$(f - \lambda \cdot \mathrm{id})(\mathbf{l}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{l} \in Ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}) \iff Ker(f - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{\mathbf{0}\}$.

$\underline{2. \iff 3.}$

$Ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}) \neq \{\mathbf{0}\} \iff \mathcal{N}ull(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) \neq \{\mathbf{0}\} \iff$
$\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}$ ir neinvertējama matrica $\iff \det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) = 0$. ■

Polinomu $R_{\mathbf{F}}(\lambda) = \det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E})$ sauc par matricas $\mathbf{F}$ *raksturīgo polinomu.*

Īpašvērtību atrašanas algoritmi:

- *Gausa metodes algoritms:*
  1. atrast f matricu $\mathbf{F}$ attiecībā uz patvaļīgu bāzi,
  2. noteikt ar kādām parametra λ vērtībām LVS

     $$(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

     ir netriviāli atrisinājumi $\mathbf{x}$, var izmantot $\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}$ pakāpienveida formu, visu šādu λ vērtību kopa ir $\mathcal{S}pec(f)$.
- *raksturīgā polinoma algoritms:*
  1. atrast f matricu $\mathbf{F}$ attiecībā uz patvaļīgu bāzi,
  2. atrisināt *raksturīgo vienādojumu*

     $$R_{\mathbf{F}}(\lambda) = \det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) = 0,$$

     visu sakņu λ vērtību kopa ir $\mathcal{S}pec(f)$.

Īpašvektoru atrašanas algoritms:

1. atrast f matricu $\mathbf{F}$ attiecībā uz patvaļīgu bāzi,
2. atrast $\mathcal{S}pec(f)$,
3. atrast $\forall\ \lambda_0 \in \mathcal{S}pec(f)$ atbilstošos īpašvektorus - atrisināt LVS $(\mathbf{F} - \lambda_0\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ attiecībā uz $\mathbf{x}$.

2.4. piemērs. $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 4 & 15 \\ \hline -2 & -7 \end{array}\right]$.

Gausa metodes algoritms

$$(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \left[\begin{array}{c|c} 4-\lambda & 15 \\ \hline -2 & -7-\lambda \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right] \iff$$

$\begin{cases} (4-\lambda)x_1 + 15x_2 = 0 \\ -2x_1 + (-7-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$. Paplašinātās matricas pakāpienveida forma ir

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & \frac{1}{2}(-7-\lambda) & 0 \\ \hline 0 & 15 + \frac{1}{2}(4-\lambda)(-7-\lambda) & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & * & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}(\lambda^2 + 3\lambda + 2) & 0 \end{array}\right]$$

Seko, ka $\exists$ netriviāli LVS atrisinājumi $\iff \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \iff \lambda \in \{-2, -1\}$.

<u>Raksturīgā polinoma algoritms</u>

$\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) = \det \left[\begin{array}{c|c} 4-\lambda & 15 \\ \hline -2 & -7-\lambda \end{array}\right] = (4-\lambda)(-7-\lambda) + 30 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda \in \{-2, -1\}$.

<u>Īpašvektori</u>

$$\lambda = -1 \implies \left[\begin{array}{c|c} 5 & 15 \\ \hline -2 & -6 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] \implies \mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} -3c \\ \hline c \end{array}\right]$$

$$\lambda = -2 \implies \left[\begin{array}{c|c} 6 & 15 \\ \hline -2 & -5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] \implies \mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} (-5/2)c \\ \hline c \end{array}\right]$$

3. 3.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

3.1 L, V - LT ar bāzēm $\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ un $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$. Attiecībā uz šīm bāzēm LA f matrica ir $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 3 & -1 \\ \hline -2 & 1 \\ \hline 1 & 4 \end{array}\right]$. Atrast tādas L un V bāzes $\mathcal{B}'_L$ un $\mathcal{B}'_V$ (izteikt to elementus izmantojot sākotnējās bāzes), attiecībā uz kurām f matrica ir normālajā formā.

3.2 Atrast matricu raksturīgos polinomus.

(a) $\left[\begin{array}{c|c} 3 & 5 \\ \hline 7 & 9 \end{array}\right]$;

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} 3 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 5 \\ \hline -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$.

3.3 Atrast matricu īpašvērtības un īpašvektorus.

(a) $\left[\begin{array}{c|c} 5 & -4 \\ \hline 9 & -7 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{Q}$;

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} -1 & 3 & 1 \\ \hline 3 & -3 & -1 \\ \hline -12 & 17 & 6 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{Q}$;

(c) $\left[\begin{array}{c|c|c|c} 3 & 2 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 5 & 6 & -5 \\ \hline 7 & 7 & 7 & -6 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$.

3.4 Atrast matricu īpašvērtības un īpašvektorus.

(a) $\left[\begin{array}{c|c} 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{Q}$, virs $\mathbb{R}$.

(b) $\left[\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$, virs $\mathbb{R}$, virs $\mathbb{C}$.

3.5 Atrast īpašvērtības un īpašvektorus LO polinomu telpās.

(a) $L = \mathbb{R}[X]_3,\ f(p) = p'$;

(b) $L = \mathbb{R}[X]_2,\ f(p) = (X \cdot p)'$.

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

3.6 Vispārināt īpašvektora un īpašvērtību jēdzienus, to atrašanas algoritmus uz divdimensionālu IA gadījumu.

3.7 Invertējamai $n \times n$ matricai $\mathbf{A}$ ir n īpašvērtības $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (iespējams, dažas ir vienādas). Atrast LO $f(\mathbf{M}) = \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}$ īpašvērtības.