

DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra II

11.nodarbība

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

| | |
|--|----|
| 1. Lineāru attēlojumu struktūra | 3 |
| 2. Bilineārās formas un skalārais reizinājums | 5 |
| 3. Eiklīda telpu īpašības | 7 |
| 4. 11.mājasdarbs | 9 |
| 4.1. Obligātie uzdevumi | 9 |
| 4.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi | 10 |

1. Lineāru attēlojumu struktūra

Svarīgākie jēdzieni:

- LO invarianta apakštelpa,
- LO īpašvektors,
- LO īpašvērtība,
- LO un matricas raksturīgais polinoms,
- līdzīgas matricas,
- diagonalizējama matrica,
- triangulējama matrica,
- k -algebra,
- k -algebru piemēri - polinomu algebra, matricu algebra, LO algebra,
- polinoma pakāpe, normalizēts polinoms, polinomu redukcija,
- matricu anulējošs polinoms,

- minimālais anulējošais polinoms.

Svarīgākie fakti un metodes:

- LA attēlojuma struktūras teorēma,
- invariantu apakštelpu īpašības,
- teorēma par īpašvērtību ekvivalentajām definīcijām,
- īpašvērtību un īpašvektoru atrašanas algoritmi,
- raksturīgā polinoma invariance,
- raksturīgā polinoma koeficientu īpašības,
- īpašvektoru īpašības,
- Geršgorina teorēma reālā un kompleksā gadījumā,
- Perrona teorēma,
- diagonalizējamības kritēriji,
- triangulējamības kritērijs,
- polinomu pakāpes īpašības,

- polinomu dalīšana ar atlikumu,
- matricu algebru pamatīpašības,
- matricas anulējošo polinomu īpašības,
- minimālā anulējošā polinoma īpašības,
- Hamiltona-Kēli teorēma.

2. Bilineārās formas un skalārais reizinājums

Svarīgākie jēdzieni:

- polilineārs attēlojums,
- polilineāra forma,
- bilineāra forma,
- simetriska forma,

- bilineāras formas matrica,
- skalārais reizinājums,
- Eiklīda telpa,
- ortogonāli elementi,
- Eiklīda norma,
- ortonormēta kopa,
- ortonormēta bāze.

Svarīgākie fakti un metodes:

- bilineāra forma ir noteikta ar tās darbību uz bāzes elementiem,
- bilineāras matricas maiņa pārejot uz jaunu bāzi,
- Eiklīda normas īpašības,
- ortogonālas kopas lineāra neatkarība,
- Grama-Šmita ortonormēšanas algoritms.

3. Eiklīda telpu īpašības

Svarīgākie jēdzieni:

- ortogonālais papildinājums,
- ortogonālā papildinošā apakštelpa,
- izometrija,
- ortogonāla matrica,
- ortoprojektors,
- atlikumu vektors,
- LVS tuvināts atrisinājums,
- mazāko kvadrātu atrisinājums,
- LVS normālā sistēma,
- bezgalīgi dimensionālas ET,
- Furjē koeficients.

Svarīgākie fakti un metodes:

- elementa koordinātes un norma attiecībā uz ortonormētu bāzi,
- matricu pārvešana skalārajā reizinājumā attiecībā uz ortonormētu bāzi,
- ortogonālā papildinājuma īpašības,
- ortogonālās papildinošās apakštelpas īpašības,
- izometrijas eksistence vienādas dimensijas ET,
- ortogonālo matricu īpašības,
- QR faktorizācija,
- ortoprojektoru pamatīpašības,
- ortoprojektoru normu īpašības,
- ortoprojekcijas ekstremālā īpašība,
- normālās sistēmas atrisinājums kā mazāko kvadrātu atrisinājums,
- normālo sistēmu atrisināmība,
- projekciju īpašības bezgalīgi dimensionālās Eiklīda telpās.

4. 11.mājasdarbs

4.1. Obligātie uzdevumi

11.1 Atrast īpašvērtības un īpašvektorus.

$$(a) \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \right], \text{ vairs } \mathbb{R} \text{ un } \mathbb{C};$$

$$(b) \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 11 & 11 & 1 \\ \hline 11 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right], \text{ vairs } \mathbb{R}.$$

11.2 $L = \mathbb{R}[X]_n$, $\varphi_n \in \mathcal{E}nd(L)$: $\varphi(p) = \frac{1}{x} \int_0^x p(t) dt$. Atrast φ_2 un φ_3 invariantās apakštelpas, īpašvērtības un īpašvektorus.

11.3 Atrast $\mathbf{v} \in E$ ortoprojkciju uz V un V^\perp .

$$(a) E = \mathbb{R}^3, V = \langle (2, 1, 0), (-1, -1, 1) \rangle, \mathbf{v} = (1, 0, 1);$$

$$(b) E = \mathbb{R}^4, V = \langle (1, 2, -1, 2), (2, -1, 2, -3) \rangle, \mathbf{v} = (1, 1, 1, 1).$$

4.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

11.4 $L = \mathbb{R}[X]_n$, $f(p, q) = \int_0^1 p(t)q'(t)dt$. Atrast L bāzi attiecībā uz kuru f matrica ir pēc iespējas vienkāršākā formā (satur tikai $0, \pm 1$).