*DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE*
*Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte*
*Matemātikas katedra*
*Bakalaura studiju programma "Matemātika"*

*Studiju kurss*

# Lineārā algebra II

## 1.lekcija

*Docētājs: Dr. P. Daugulis*

*2009./2010.studiju gads*

# Saturs

**Lekcijas mērķis:**

- apgūt lineāro attēlojumu teorijas pamatfaktus.

**Lekcijas kopsavilkums:**

- var definēt funkcijas starp lineārajām telpām, kas saglabā operācijas - *lineārus attēlojumus* un pētīt šādu funkciju īpašības,
- lineārus attēlojumus var uzdot matricu formā.

**Svarīgākie jēdzieni:** $k$-lineārs attēlojums, izomorfisms, operators, funkcionālis, dabiskie lineārie attēlojumi - nulles, vienības, apakštelpas iekļaušanas, elementa fiksēšanas, projekciju LA, vektoru, aritmētisko telpu un matricu LA piemēri, LA matrica attiecībā uz dotajām bāzēm, LA grafs.

**Svarīgākie fakti un metodes:** LA pamatīpašības, LA noteikšana ar tā darbību uz bāzes elementiem, LA darbības aprēķināšana izmantojot matricu reizināšanu, LA grafa konstruēšana.

# 1. Lineārie attēlojumi

## 1.1. Motivācijas

### 1.1.1. Abstraktā algebra

Strādājot ar algebriskām struktūrām, svarīgas ir tās funkcijas, kuras var uzskatīt par elementu pārapzīmēšanas funkcijām, kas saglabā operāciju tabulas.

Strādājot ar lineārajām telpām, svarīgas ir funkcijas, kas saglabā abas operācijas.

### 1.1.2. Matemātiskā modelēšana

Praktiskajos pielietojumos, dažādu sistēmu vai procesu modelēšanā:

- parasti sistēmas raksturo vairāki skaitliski parametri, tāpēc tās tiek iekodētas kā skaitļu virknes - vektori;

- bieži modelējamās sistēmas parametru virknēm ir jēga definēt saskaitīšanas un reizināšanas ar skaitli operācijas - visas iespējamās virknes var veidot lineāru telpu.

Nereti sistēmas pētīšanā figurē funkcijas, kuru darbības rezultātā sistēmas parametri pārveidojas kā lineāras funkcijas no citiem parametriem:

$$(x_1, ..., x_n) \to (\sum_{i=1}^{n} c_{1i}x_i, ..., \sum_{i=1}^{n} c_{ni}x_i).$$

Lineāras funkcijas tiek izmantotas šādu svarīgāko iemeslu dēļ:

- kā *lineārais tuvinājums* jeb *linearizācija* - ar lineāru funkciju palīdzību var *tuvināt* jeb *aproksimēt* patvaļīgas funkcijas (tāpat kā ar taisnēm var tuvināt patvaļīgas līknes),
- kā *superpozīcija* - lineāras funkcijas atbilst vairāku faktoru summai (superpozīcijai) ar niecīgi mazu dažādu faktoru savstarpējo mijiedarbību,
- abi minētie faktori bieži ir svarīgi tad, ja sistēmas parametru izmaiņas ir nelielas.

Šādus sistēmu pārveidojumus var uzskatīt par funkcijām visu iespējamo parametru vektoru kopā.

Šādas funkcijas var pētīt

- *bezkoordinātu formā* - izmantojot LT pamatīpašības, neizmantojot bāzes;
- *koordinātu formā* - fiksējot konkrētas bāzes un apskatot elementu koordinātu izmaiņas.

## 1.2. Definīcijas

$L$,$V$ - $k$-lineāras telpas. Funkciju $f : L \to V$ sauc par *$k$-lineāru attēlojumu (LA, lineāru morfismu, homomorfismu)*, ja

- $f(\mathbf{l} + \mathbf{l}') = f(\mathbf{l}) + f(\mathbf{l}')$ - $f$ *saglabā saskaitīšanu;*
- $f(\lambda \mathbf{l}) = \lambda f(\mathbf{l})$ - $f$ *saglabā reizināšanu.*

Speciālgadījumi:

- LA $L \to L$ sauc par *lineāru operatoru (LO)* vai *endomorfismu.*
- LA $L \to k$ sauc par *lineāru funkcionāli (LF).*
- bijektīvu LA sauc par *lineāru izomorfismu (LI).*

Visu LA $L \to V$ kopu apzīmē ar $\mathcal{H}om(L, V)$.

## 1.3. Pamatīpašības

**1.1. teorēma.** $L, V$ - LT, $f : L \to V$ - LA.

1. $f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{l}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\mathbf{l}_i)$.
2. $f(\mathbf{0}_L) = \mathbf{0}_T$.
3. $f(-\mathbf{l}) = -f(\mathbf{l})$.

PIERĀDĪJUMS

1.

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathbf{l}_i\Big) = f\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\mathbf{l}_i + \lambda_n\mathbf{l}_n\Big) = \underbrace{f\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\mathbf{l}_i\Big)}_{\text{turpinām pārveidot}} + f(\lambda_n\mathbf{l}_n) =$$

$$\underbrace{f\Big(\sum_{i=1}^{n-2}\lambda_i\mathbf{l}_i\Big)}_{\text{turpinām pārveidot}} + f(\lambda_{n-1}\mathbf{l}_{n-1}) + f(\lambda_n\mathbf{l}_n) = \ldots = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i\mathbf{l}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(\mathbf{l}_i).$$

2. $f(\mathbf{0}_L) = f(\mathbf{0}_L + \mathbf{0}_L) = f(\mathbf{0}_L) + f(\mathbf{0}_L) \implies f(\mathbf{0}_L) = \mathbf{0}_T$.

3. $\underbrace{f(\mathbf{0}_L)}_{=\mathbf{0}_T} = f(\mathbf{l} - \mathbf{l}) = f(\mathbf{l}) + f(-\mathbf{l}) \implies -f(\mathbf{l}) = f(-\mathbf{l})$. ■

## 1.4. Klasiskie piemēri

### 1.4.1. Dabiskie lineārie attēlojumi

Nulles attēlojums

$L, V$ - LT, $\forall\ \mathbf{l} \in L\ O(\mathbf{l}) = \mathbf{0}_T$.

Vienības attēlojums

$\forall\ L$, id : $L \to L$, id$(\mathbf{l}) = \mathbf{l}$.

Apakštelpas iekļaušana

$\forall\ L, L \leq V$, $\iota : L \to V$, $\iota(\mathbf{l}) = \mathbf{l}$.

Elementa fiksēšana

$L$ - $k$-lineāra telpa. Fiksēsim $\mathbf{l} \in L$. Definēsim $\chi_{\mathbf{l}} : k \to L$ ar nosacījumu $\chi_{\mathbf{l}}(a) = a \cdot \mathbf{l}$.

Projekcija uz faktortelpu

$\forall L, V \leq L$, $\pi : L \to L/V$, $\pi(\mathbf{l}) = [\mathbf{l}]$.

Funkcionāļi

$L$ - $k$-lineāra telpa. LA $L \to k$ - funkcionālis.

### 1.4.2. Vektoru/ğeometriskie attēlojumi

- Simetrija attiecībā uz taisni vai centru,
- rotācija ap centru,
- homotētija,
- projekcija uz taisni.

### 1.4.3. Aritmētisko vektoru attēlojumi

- Elementu kārtības maiņa,
- jebkura elementa aizvietošana ar elementu lineāru kombināciju.

### 1.4.4. Matricu attēlojumi

- Transponēšana,
- reizināšana ar fiksētu matricu,
- apakšmatricas izgriešana.

### 1.4.5. Funkciju attēlojumi

- Reizināšana ar fiksētu funkciju,
- atvasināšana.

# 2. Lineāro attēlojumu matricu pieraksts

LA tika definēti bezkoordinātu formā. Tagad sāksim uzdot un pētīt LA koordinātu formā - fiksējot bāzes un izmantojot elementu koordinātes.

Parasti lineārās algebras lietojumos - dabaszinātnēs, inženierzinātnēs u.c. tiek izmantots koordinātu pieraksts. Ja redzat vektorus vai matricas, tā ir pazīme, ka tiek izmantota lineārā algebra.

## 2.1. Pamatojums

$L$, $V$ - LT ar bāzēm $\begin{cases} \mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}, \\ \mathcal{B}_V = \{\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_m\}. \end{cases}$ Sākot no šīs vietas uzskatīsim, ka ir dotas *sakārtotas bāzes.*

**2.1. teorēma.** $f \in \mathcal{H}om(L, V)$, $\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ - $L$ bāze. Tad $f$ ir viennozīmīgi noteikts ar tā darbību uz $\mathcal{B}_L$ elementiem.

PIERĀDĪJUMS

$\mathbf{l} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{e}_j \implies$

$$f(\mathbf{l}) = f\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{e}_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} f\Big(\alpha_j \mathbf{e}_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(\mathbf{e}_j). \blacksquare$$

## 2.2. Definīcija

Pieņemsim, ka ir dots $f \in Hom(L, V)$:

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = f_{11}\mathbf{t}_1 + f_{21}\mathbf{t}_2 + ... + f_{m1}\mathbf{t}_m \\ f(\mathbf{e}_2) = f_{12}\mathbf{t}_1 + f_{22}\mathbf{t}_2 + ... + f_{m2}\mathbf{t}_m \\ ... \\ f(\mathbf{e}_n) = f_{1n}\mathbf{t}_1 + f_{2n}\mathbf{t}_2 + ... + f_{mn}\mathbf{t}_m \end{cases}$$

Matricu $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \hline f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{array}\right]$ sauc par $f$ matricu attiecībā uz sakārtotajām bāzēm $\mathcal{B}_L$ un $\mathcal{B}_V$.

**2.1. piezīme.** Redzam, ka $\mathbf{F}$ $j$-tā kolonna ir $f(\mathbf{e}_j)$ koordinātu kolonna attiecībā uz sakārtoto bāzi $\mathcal{B}_V$.

**2.2. piezīme.** Ir jāizšķir 3 gadījumi:

- attēlojums ir starp dažādām LT, bāzes vienmēr ir dažādas,
- attēlojums ir vienā LT, atiecībā uz divām dažādām sakārtotām bāzēm,
- attēlojums ir vienā LT, attiecībā uz vienu bāzi.

**2.1. piemērs.** $L = \mathbb{R}^2$, $f : L \to L$ - simetrija attiecība uz $x$-asi. Izmantosim kanonisko bāzi $\{(1,0),(0,1)\}$.

$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1,\ f(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2 \implies f$ matrica attiecībā uz kanonisko bāzi ir $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right]$.

## 2.3. Lineāra attēlojuma darbības aprēķināšana

Izmantojot matricu reizināšanas operāciju var aprēķināt $f(\mathbf{l})$, ja ir zināmas $\mathbf{l}$ koordinātes attiecībā uz bāzi $\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$:

$$\mathbf{l} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{e}_j .$$

1. $\mathbf{l}$ reprezentējam kā kolonnas matricu: $\mathbf{l} \sim \left[\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \hline ... \\ \hline \alpha_n \end{array}\right]$.
2. Atrodam
   $f(\mathbf{l}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left( \sum_{i=1}^{n} f_{ij} \mathbf{t}_i \right) =$

   $\sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \alpha_j \right) \mathbf{t}_i \sim \left[\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{n} f_{1j}\alpha_j \\ \hline ... \\ \hline \sum_{j=1}^{n} f_{nj}\alpha_j \end{array}\right] = \mathbf{Fl}.$

**2.2. piemērs.** $\mathbf{l} = \left[\begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array}\right]$, $\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -3 \\ \hline 1 & 4 \end{array}\right] \Longrightarrow \mathbf{Fl} = \left[\begin{array}{c} 3 \\ \hline -2 \end{array}\right]$.

## 2.4. Klasisko piemēru matricas

### 2.4.1. Dabiskie attēlojumi

Nulles attēlojums - Nulles matrica.

Vienības attēlojums

$\mathrm{id}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \implies$ matrica ir $\mathbf{E}_n$.

Elementa fiksēšana

$L$ - $k$-lineāra telpa, $L$ bāze - $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, $k$ bāze - $\{1\}$. Fiksēsim $\mathbf{l} \in L$. Definēsim

$$\chi_{\mathbf{l}} : k \to L,$$
$$\chi_{\mathbf{l}}(a) = a\mathbf{l}.$$

Ja $\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i$, tad $\chi$ matrica ir $\left[\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \hline ... \\ \hline \alpha_n \end{array}\right]$.

Funkcionāļi

$L$ - $k$-lineāra telpa, LF $\varphi : L \to k$. $\varphi$ matrica ir $\left[\begin{array}{c|c|c} \varphi(\mathbf{e}_1) & \ldots & \varphi(\mathbf{e}_n) \end{array}\right]$.

### 2.4.2. Vektoru/punktu operācijas

Projekcija uz $x$-asi: $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$.

Rotācija ap centru par $\pi/2$: $\left[\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$.

## 2.5. Lineāro attēlojumu vizualizācija

### 2.5.1. Attēlojuma grafs (atkārtojums)

Attēlojumus var vizualizēt ar *attēlojuma grafa* palīdzību: ja ir dots attēlojums $f : A \to B$, tad $\forall\ a \in A$ zīmēsim orientētu šķautni uz $\forall\ b \in f(a)$: $a \dashrightarrow b$.

**2.3. piemērs.** Ja attēlojums ir galīgas kopas permutācija, tad attēlojuma grafs sadalās ciklos.

### 2.5.2. Lineāra attēlojuma matricas grafs

Ja ir dots LA $f : L \to T$, tad

- $f$ ir viennozīmīgi noteikts ar savu darbību uz jebkuras $L$ bāzes $\mathcal{B}_L$ elementiem un darbības rezultāts ir izteikts kā $T$ bāzes $\mathcal{B}_T$ lineāra kombinācija, tādējādi ir definēta matrica $\mathbf{F}$;
- $\mathbf{F}$ var piekārtot *matricas grafu.*

Vizualizēsim LA $f : L \to T$, kas ir uzdots ar matricu $\mathbf{F}$ attiecībā uz bāzēm $\mathcal{B}_L$ un $\mathcal{B}_T$ ar šādu *matricas grafu* $\Gamma(\mathbf{F})$:

- $\Gamma(\mathbf{F})$ virsotņu kopa ir $\mathcal{B}_L \cup \mathcal{B}_T$,
- ja $f(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} f_{ji}\mathbf{t}_j$, tad no virsotnes $\mathbf{e}_i$ zīmēsim šķautni ar svaru $f_{ji}$ uz $\forall$ virsotni $\mathbf{t}_j$: $\mathbf{e}_i \xrightarrow{f_{ji}} \mathbf{t}_j$.

**2.3. piezīme.** Ir iespējami divi gadījumi - ar divām vai vienu bāzi.

**2.4. piemērs.** LA starp dažādām telpām, kas ir uzdots ar matricu $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -1 & \alpha \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right]$ atbilst grafs

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{e}_2 \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & \mathbf{e}_1 \arrow[dl, "-1"'] \arrow[dr] & \\
\mathbf{t}_3 & & \mathbf{t}_2 & & \mathbf{t}_1
\end{tikzcd}
$$

LO, kas uzdots ar matricu $\left[\begin{array}{c|c|c} a & 0 & 0 \\ \hline 1 & a & 0 \\ \hline 0 & 1 & a \end{array}\right]$ atbilst grafs

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{e}_1 \arrow[loop above, "a"] \arrow[r] & \mathbf{e}_2 \arrow[loop above, "a"] \arrow[r] & \mathbf{e}_3 \arrow[loop above, "a"]
\end{tikzcd}
$$

# 3. 1.mājasdarbs

## 3.1. Obligātie uzdevumi

1.1 Noteikt, kuras no dotajām funkcijām ir LA $f : L \to T$:

(a) $f(\mathbf{l}) = \mathbf{c}$, kur $\mathbf{c} \in T$ ir fiksēts;
(b) $L = T$, $f(\mathbf{l}) = \mathbf{c} + \beta\mathbf{l}$, kur $\mathbf{c} \in L$ - fiksēts un $\beta \in k$ - fiksēts.

1.2 Noteikt, kuras no dotajām funkcijām ir LO $f : k^n \to k^{n'}$:

(a) $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_2, 0, x_1)$;
(b) $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1^2, 0)$;
(c) $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2, x_3 + 1)$.

1.3 Noteikt, kuras no dotajām funkcijām ir LO $f : k[X] \to k[X]$:

(a) $f(p(X)) = p(X)^2 - 1$;
(b) $f(p(X)) = (Xp(X))''$.

1.4 Noteikt, kuras no dotajām funkcijām ir LF $f : L \to k$:

(a) $L = k^n$, $f((x_1, ..., x_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i$;
(b) $L = k[X]$, $f(p) = p(0)p(1)$;

(c) $L = \mathcal{M}at(n,n,k)$, $f(\mathbf{M}) = \det \mathbf{M}$.

1.5 Ir dots LO $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ tāds, ka

$$\begin{cases} f((1,0,2)) = (3,-1,1) \\ f((0,2,-3)) = (2,1,0) \\ f((-1,1,0)) = (0,1,2). \end{cases}$$

Atrast $f((1,2,3))$.

1.6 Atrast doto LA matricas attiecībā uz dotajām bāzēm:

(a) $L = \mathbb{R}^3$, $f((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 - x_3, x_2 - x_1, 0)$, kanoniskā bāze;

(b) $L = \mathbb{C}[X]_3$, $f(p(X)) = (X^2 p(X))''$, monomu bāze;

(c) $L = \mathcal{M}at(2,2,\mathbb{R})$, $f(\mathbf{M}) = \mathbf{M}^T$, kanoniskā bāze.

## 3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

1.7 Atrast tādu LT $V$, lai būtu definēts "nenoteiktās integrēšanas" LA $\mathcal{I} : k[X] \to V$.

1.8 Atrast doto LA $f$ matricas attiecībā uz patvaļīgi izvēlētam bāzēm:

(a) $L = \mathcal{M}at(m,n,k)$, $V = \mathcal{M}at(p,n,k)$. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(p,m,k)$- fiksēta matrica. $f : L \to V : \ f(\mathbf{M}) = \mathbf{AM}$;

(b) $L = \mathcal{M}at(n,n,k)$, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(n,n,k)$- fiksēta matrica. $f : L \to L : \ f(\mathbf{M}) = [\mathbf{A},\mathbf{M}] \stackrel{def}{=} \mathbf{AM} - \mathbf{MA}$.