DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

9.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt lineāro telpu teorijas pamatdefinīcijas.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt algebrisku struktūru - *lineāro telpu (LT)*, kas vispārina vektoru, matricu un LVS atrisinājumu īpašības,
- vairākās zināmās struktūrās var atpazīt LT īpašības.

Svarīgākie jēdzieni: k-lineāra telpa, aritmētiskā LT, matricu LT, polinomu LT, matricas nulltelpa, LT apakštelpa, lineāra kombinācija, lineārais slēgums, veidotājsistēma.

Svarīgākie fakti un metodes: LT pamatīpašības, LT piemēri, apakštelpu īpašības, lineārā slēguma īpašības.

1. Lineārās telpas

1.1. Ievads

1.1.1. Skaitļu lauki

Skaitļu kopa - *lauks* :

- divas bināras asociatīvas operācijas $+$ un $\cdot$,
- $+$ - komutatīva operācija, eksistē 0 un katram skaitlim a ir $-a$,
- $+$ un $\cdot$ saista distributivitātes likums.
- katram nenulles skaitlim a eksistē apgrieztais (multiplikatīvi inversais) skaitlis a^{-1}: $a \cdot a^{-1} = 1$.

Lauki: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Definēsim jauna tipa algebrisku struktūru: *lineāru telpu (LT) virs lauka*, kurā ir definētas šādas operācijas:

1. saskaitīšana +: LT elementus var saskaitīt tā it kā tie būtu skaitļi;
2. reizināšana ar lauka elementiem, LT elementus var "izstiept" ar koeficientu.

Ja nav uzdota papildus struktūra, LT elementus nevar "reizināt" savā starpā.

Par LT elementiem var domāt kā par "daudzdimensionāliem skaitļiem", kurus gan nevar "reizināt" savā starpā.

1.1.2. Motivējošie piemēri

Homogēnas LVS atrisinājumi

Homogēnai LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$

- atrisinājumu (kā kolonnu matricu) summa ir atrisinājums:

$$\begin{cases} \mathbf{Ax}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{0} \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{Ax}_1 + \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

- atrisinājuma (kā kolonnu vai rindu matricu) reizinājums ar skaitli ir atrisinājums:
  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Paralēlā pārnese, vektori

Citos kursos tika definēti *vektori:*

- nogrieznis ar virzienu,
- sakārtots punktu pāris.

Tika definētas šādas operācijas ar vektoriem:

- vektoru saskaitīšana,
- vektora reizināšana ar skaitli.

Var redzēt, ka vektoru operācijām izpildās šādas īpašības:

- saskaitīšana ir asociatīva un komutatīva,
- eksistē nulles vektors,

- katram elementam eksistē negatīvais vektors,
- reizināšanai ar skaitli izpildās distributīvās un asociatīvās īpašības.

1.1.3. Definīcija

Par *lineāru telpu (LT) virs lauka* k *(*k*-lineāru telpu, vektoru telpu)* sauc kopu L ar šādām operācijām:

1. bināra operācija $+$ kopā L:
   - $(x+y)+z = x+(y+z)$ (asociativitāte),
   - $x+y = y+x$ (komutativitāte),
   - $\exists\, 0 \in L:\ x+0 = x, \forall\, x \in L$ (neitrālā elementa eksistence, apzīmējums 0 var būt arī cits),
   - $\forall\, x \in L\ \exists -x:\ x+(-x) = 0$ (inversā elementa eksistence);
2. lauka k *darbības funkcija* $k \times L \to L$, $(\lambda, x) \to \lambda x$:

- $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$,
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
- $1 \cdot x = x$,
- $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.

Ar simbolu + parasti apzīmē saskaitīšanu gan laukā k, gan LT, cenšas nepieļaut pārpratumus.

Ja $k = \mathbb{R}$, tad k-lineāru telpu sauc par *reālu lineāru telpu*.

1.1. teorēma. $\forall$ LT izpildās šādas īpašības:

1. $0 \cdot \mathbf{l} = \mathbf{0}$.
2. $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
3. $\lambda \cdot \mathbf{l} = \mathbf{0} \implies \lambda = 0$ vai $\mathbf{l} = \mathbf{0}$.
4. $n \cdot \mathbf{l} = \underbrace{\mathbf{l} + \ldots + \mathbf{l}}_{n \text{ reizes}}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

5. $(-1) \cdot \mathbf{l} = -\mathbf{l}$.

6. $(-\lambda)\mathbf{l} = -(\lambda\mathbf{l}) = \lambda(-\mathbf{l})$.

PIERĀDĪJUMS

1. $0{\cdot}\mathbf{l} = (0{+}0)\mathbf{l} = 0{\cdot}\mathbf{l}{+}0{\cdot}\mathbf{l} \Longrightarrow 0{\cdot}\mathbf{l}{+}(-0{\cdot}\mathbf{l}) = 0{\cdot}\mathbf{l}{+}0{\cdot}\mathbf{l}{+}(-0{\cdot}\mathbf{l}) \Longrightarrow$
$\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{l}$.

2. $\lambda{\cdot}\mathbf{0} = \lambda{\cdot}(\mathbf{0}{+}\mathbf{0}) = \lambda{\cdot}\mathbf{0}{+}\lambda{\cdot}\mathbf{0} \Longrightarrow \lambda{\cdot}\mathbf{0} = \lambda{\cdot}\mathbf{0}{+}\lambda{\cdot}\mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{0} = \lambda{\cdot}\mathbf{0}$.

3. $\lambda \neq 0 \Longrightarrow \exists\ \lambda^{-1} \Longrightarrow \lambda^{-1}(\lambda \cdot \mathbf{l}) = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot \mathbf{l} = 1 \cdot \mathbf{l} = \mathbf{l} = \mathbf{0}$.

4. Indukcija ar parametru n. Pieņemsim, ka $(n{-}1)\mathbf{l} = \underbrace{\mathbf{l} + ... + \mathbf{l}}_{n-1 \text{ reizes}} \Longrightarrow$
$n \cdot \mathbf{l} = (n-1+1)\mathbf{l} = (n-1)\mathbf{l} + \mathsf{l} = \underbrace{\mathbf{l} + ... + \mathbf{l}}_{n-1 \text{ reizes}} {+}\mathbf{l} = \underbrace{\mathbf{l} + ... + \mathbf{l}}_{n \text{ reizes}}$.

5. $(-1) \cdot \mathbf{l} + \mathbf{l} = (-1+1)\mathbf{l} = 0 \cdot \mathbf{l} = \mathbf{0} \implies -\mathbf{l} = (-1) \cdot \mathbf{l}$.

6. $(-\lambda)\mathbf{l} = (\lambda(-1)\mathbf{l}) = \lambda(-\mathbf{l})$.

$(-\lambda)\mathbf{l} = (-1)(\lambda \cdot \mathbf{l}) = -(\lambda\mathbf{l})$. ■

1.1.4. Lineārās kombinācijas

Doti LT L elementi $\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_n$. Par to *lineāru kombināciju ar koeficientiem* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sauc L elementu

$$\lambda_1\mathbf{l}_1 + ... + \lambda_n\mathbf{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\mathbf{l}_i.$$

Ja vismaz viens no $\lambda_1, ..., \lambda_n$ nav vienāds ar 0, tad lineāro kombināciju sauc par *netriviālu* (pretējā gadījumā par *triviālu*).

1.1. piemērs. Viena elementa kopas $\{\mathbf{l}\}$ lineārās kombinācijas - $\lambda\mathbf{l}$. Vektori.

1.2. Klasiskās lineārās telpas

1.2.1. Speciālgadījums - "pati mazākā telpa"

Nulles LT $\forall$ laukam k kopa $\{0\}$ ir LT, operācijas ir definētas šādi:

- $0 + 0 = 0$;
- $\lambda \cdot 0 = 0$.

1.2.2. Aritmētiskā (koordinātu, vektoru) telpa

k - lauks. Apzīmēsim ar k^n kopu, kuras elementi ir visas virknes ar garumu n.

Definēsim kopā k^n LT struktūru:

- $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$;
- $\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.

Var pārbaudīt, ka visas aksiomas izpildās.

k^n, kur $n \in \{1, 2, 3\}$ var identificēt ar ģeometrisko vektoru telpām.

Var definēt LT, kuras elementi ir bezgalīgas virknes.

Apzīmēsim ar $k^{\mathbb{N}}$ kopu, kuras elementi ir visas uz labo pusi bezgalīgās virknes formā $(x_1, ..., x_n, ...)$.

Kopā $k^{\mathbb{N}}$ ir uzdota LT struktūra ar virkņu saskaitīšanas un reizināšanas ar skaitli operācijām.

1.2.3. Matricu telpa

k - lauks. Definēsim matricu kopā $\mathcal{M}at(m, n, k)$ LT struktūru šādā veidā:

- $+$ - matricu saskaitīšana;
- $\cdot$ - matricas reizināšana ar skaitli.

Var pārbaudīt, ka visas aksiomas izpildās.

1.1. piezīme. $k^n = \mathcal{M}at(1, n, k)$.

1.2.4. Polinomu telpa

k - lauks. $k[X]$ - visu polinomu kopa ar koeficientiem no k un argumentu X.

Definēsim kopā $k[X]$ LT struktūru šādā veidā:

- $(f, g) \mapsto f + g$: $(f + g)(X) = f(X) + g(X)$;
- $(\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f$: $(\lambda \cdot f)(X) = \lambda \cdot f(X)$.

Var pārbaudīt, ka visas aksiomas izpildās.

1.2.5. Homogēnas LVS atrisinājumu telpa

$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ - homogēna $m \times n$ LVS ar atrisinājumu kolonnu kopu $\mathcal{N}ull(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{M}at(n, 1, k)$:

$$\mathcal{N}ull(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M}at(n, 1, k) \Big| \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}.$$

$\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$ sauc arī par matricas $\mathbf{A}$ *nulltelpu.*

Definēsim kopā $\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$ LT struktūru kā matricām.

Var pārbaudīt, ka

- $\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$ ir slēgta attiecībā uz LT operācijām,
- visas aksiomas izpildās.

1.3. Apakštelpas

L - LT, $V \subseteq L$. V sauc par L *apakštelpu (lineāru apakštelpu,* apzīmē $V \leq L$), ja

1. $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V \implies \mathbf{v}+\mathbf{v}' \in V$ (V ir slēgta attiecībā uz saskaitīšanu),
2. $\lambda \in k,\ \mathbf{v} \in V \implies \lambda\mathbf{v} \in V$ (V ir slēgta attiecībā uz reizināšanu ar lauka elementiem).

1.2. piezīme. $\forall$ LT L $\exists$ 2 *triviālas apakštelpas:*

- $\{\mathbf{0}\} \leq L$,
- $L \leq L$.

1.2. piemērs. Taisnes vektori. Diagonālas matricas. Monomi. Polinomi ar ierobežotu pakāpi.

1.2. teorēma. *L - lineāra telpa. $V \leq L \implies V$ ir LT.*

PIERĀDĪJUMS LT operācijas ir korekti definētas kopā V. LT aksiomas izpildās tāpēc, ka tās izpildās LT L. ■

1.4. Lineārais slēgums

1.4.1. Definīcija

$X \subseteq L$. Visu X galīgu apakškopu elementu lineāru kombināciju kopu sauc par X *lineāro slēgumu*, apzīmē ar $\langle X \rangle$.

Vienkāršākās īpašības:

- $X \subseteq \langle X \rangle$;
- $\langle \{\mathbf{0}\} \rangle = \{\mathbf{0}\}$;

- $\langle\{\mathbf{l}\}\rangle = \{\mathbf{x} \in L \big| \mathbf{x} = \mu\mathbf{l},\ \text{kur } \mu \in k\};$
- $\langle L\rangle = L.$

1.3. teorēma. *L - LT, $X \subseteq L$.*

1. $\langle X\rangle \leq L.$
2. $X \leq L \implies \langle X\rangle = X.$

PIERĀDĪJUMS

1. $\begin{cases} \mathbf{u} \in \langle X\rangle \\ \mathbf{u}' \in \langle X\rangle \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{u} = \sum\limits_i \mu_i\mathbf{x}_i,\ \text{kur } \mathbf{x}_i \in X \\ \mathbf{u}' = \sum\limits_i \mu_i'\mathbf{x}_i',\ \text{kur } \mathbf{x}_i' \in X \end{cases} \implies$

$$\begin{cases} \mathbf{u} + \mathbf{u}' = \sum\limits_i \mu_i\mathbf{x}_i + \sum\limits_i \mu_i'\mathbf{x}_i' \in \langle X\rangle \\ \lambda\mathbf{u} = \lambda\Big(\sum\limits_i \mu_i\mathbf{x}_i\Big) = \sum\limits_i (\lambda\mu_i)\mathbf{x}_i \in \langle X\rangle \end{cases}$$

2. $X \subseteq \langle X\rangle$. Jāpierāda, ka $\langle X\rangle \subseteq X$.

$$\mathbf{u} \in \langle X \rangle \implies \mathbf{u} = \sum_i \mu_i \mathbf{x}_i, \text{ kur } \mathbf{x}_i \in X.$$

$$X \leq L \implies \sum_i \mu_i \mathbf{x}_i \in X \implies \mathbf{u} \in X.$$

■

1.4.2. Veidotājsistēmas

$X \subseteq L$ sauc par L *veidotājsistēmu (ğenerējošo kopu)*, ja $\langle X \rangle = L$.

1.3. piemērs. k^n veidotājsistēma var būt $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, kur

$$\mathbf{e}_i = \underbrace{(0, ..., 1, ..., 0)}_{\text{1 i-tajā vietā}} : \ \forall\ (x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i.$$

$n = 3$: $(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$.

$\mathcal{M}at(m, n, k)$ veidotājsistēma $\mathcal{B} = \{\mathbf{E}_{11}, ..., \mathbf{E}_{mn}\}$:$\mathbf{A} = \sum_{i,j} a_{ij} \mathbf{E}_{ij}$.

2. 9.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

9.1 Noteikt, vai dotās kopas ir LT:

(a) plaknes vektori, kuru galapunkti atrodas pirmajā kvadrantā;

(b) $m \times n$ matricas ar fiksētu rangu r;

(c) $S \subseteq \mathbb{R}^4$, $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = x_3, x_2 = x_4)\}$.

9.2 Noteikt, vai LT L apakškopa V ir L apakštelpa:

(a) $L = \mathbb{R}^2$ (plaknes vektori), V - vektori, kuru galapunkti ir uz līknes $y = x^3$,

(b) $L = \mathbb{R}^n$, V - virknes, kuru visi elementi ir veseli skaitļi,

(c) $L = \mathcal{M}at(m, n, k)$, V - augšēji trijstūrveida matricas,

(d) $L = \mathbb{R}[X]$, $V = \{f | \deg(f) \geq 2\}$.

9.3 Noteikt vai elements $\mathbf{l}$ pieder lineārajam slēgumam S.

(a) $S = \langle (0, 1, 2), (-1, 3, 1) \rangle$, $\mathbf{l} = (4, -9, 10)$, $L = \mathbb{R}^3$,

(b) $S = \langle X - 1, X^2 - 1 \rangle$, $\mathbf{l} = X + 1$, $L = \mathbb{R}[X]$,

(c) $S = \langle \mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{22}, \mathbf{E}_{22} + \mathbf{E}_{33} \rangle$, $\mathbf{l} = \mathbf{E}_3$, $L = \mathcal{M}at(3, \mathbb{R})$.

9.4 Atrast kādu LT L galīgu veidotājsistēmu.

(a) L - simetrisku $n \times n$ matricu telpa,

(b) L - homogēnas LVS

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0$$

atrisinājumu telpa.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

9.5 (a) Pierādīt, ka saskaitīšanas komutativitāte seko no citām LA definējošām īpašībām.

(b) Izpētīt, kādas LT definējošās īpašības seko no citām.