DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

8.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2013./2014.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt matricu determinanta īpašības un lietojumus.

Lekcijas kopsavilkums:

- determinantu var definēt rekursīvi,
- var pierādīt dažas jaunas determinanta īpašības,
- determinantus var izmantot matricu invertēšanā, LVS risināšanā un ģeometrijā.

Svarīgākie jēdzieni: determinanta rekursīvā definīcija (determinanta izvirzījums pēc pirmās kolonnas), algebriskā papildinājuma matrica.

Svarīgākie fakti un metodes: Laplasa izvirzījums pēc rindas vai kolonnas, izvirzījuma ortogonalitātes īpašība, inversās matricas atrašana ar *ap* matricas metodi, Krāmera formulu metode, determinanta ģeometriskā interpretācija.

1. Determinanta īpašības

1.1. Determinanta izvirzījumi pēc rindām un kolonnām

1.1.1. Determinanta izvirzījums pēc pirmās kolonnas

A - $n \times n$ matrica. Apzīmēsim ar $\mathbf{A}_{ij}$ matricu, ko iegūst no **A** izsvītrojot i-to rindu un j-to kolonnu.

1.1. piemērs. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 4 & -1 \\ \hline 3 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 1 & -4 \end{array}\right]$, $\mathbf{A}_{11} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 2 \\ \hline 1 & -4 \end{array}\right]$.

1.1. teorēma. Dota $n \times n$ matrica $\mathbf{A}$. Tad

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1} \det \mathbf{A}_{i1}.$$

PIERĀDĪJUMS Netiek dots. ■

1.1.2. Determinanta rekursīvā definīcija

Iepriekšējā teorēma ļauj definēt determinantu *rekursīvi* - sākot no 1×1 līdz jebkuram izmēram.

1.2. piemērs.

$$\det \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right] = a_{11} \det[a_{22}] - a_{21} \det[a_{12}] = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

1.2. Izvirzījums pēc patvaļīgas rindas vai kolonnas

1.2. teorēma. (*Laplasa izvirzījuma formulas*)

$$\det(\mathbf{A}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Big((-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ij})\Big)}_{j\text{-tās kolonnas izvirzījums}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big((-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ij})\Big)}_{i\text{-tās rindas izvirzījums}}.$$

PIERĀDĪJUMS

j-tās kolonnas izvirzījums

Matricai $\mathbf{A}$ veiksim j KEP1 virkni $K_{j,j-1}$, $K_{j-1,j-2}$,...,K_{21}, iegūsim matricu $\mathbf{A}'$ $\Longrightarrow$ $\det\mathbf{A} = (-1)^{j-1}\det\mathbf{A}'$.

Izvirzot $\det\mathbf{A}'$ pēc pirmās kolonnas, iegūsim

$$\det\mathbf{A}' = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a'_{i1}\mathbf{A}'_{i1} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{ij}\mathbf{A}_{ij} \Longrightarrow$$

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{j-1} \det \mathbf{A}' = (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{ij} \mathbf{A}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \mathbf{A}_{ij}.$$

Rindas izvirzījums tiek pierādīts līdzīgi izmantojot matricu transponēšanu un īpašību $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$. ■

1.3. piemērs. Atradīsim determinantu izvirzot pēc 2.rindas:

$$\det \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 \\ \hline 4 & 4 & -3 \end{array}\right] =$$

$$(-1)1 \cdot \det \left[\begin{array}{c|c} -2 & 1 \\ \hline 4 & -3 \end{array}\right] + 0 \cdot ... + (-1)4 \cdot \det \left[\begin{array}{c|c} 2 & -2 \\ \hline 4 & 4 \end{array}\right] =?.$$

1.3. teorēma. (*izvirzījuma ortogonalitātes īpašība*)

1. $$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Big((-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ik})\Big)}_{\text{kolonnas izvirzījums}} = 0,\ k \neq j.$$

2. $$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big((-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{kj})\Big)}_{\text{rindas izvirzījums}} = 0,\ k \neq i.$$

PIERĀDĪJUMS

1. Summā ir tādas matricas determinanta izvirzījums pēc j-tās kolonnas, kurai j-tā un k-tā kolonnas ir vienādas.

2. Summā ir tādas matricas determinanta izvirzījums pēc i-tās rindas, kurai i-tā un k-tā rindas ir vienādas. ■

1.3. Kombinatoriskā definīcija

1.3.1. Permutācijas un to sadalījumi ciklos

Definīcijas

Par kopas A *permutāciju* sauc bijektīvu (savstarpēji viennozīmīgu) funkciju

$$\sigma : A \to A.$$

Visu n elementu kopas $\{1, ..., n\}$ permutāciju kopu apzīmē ar Σ_n.

Permutācijas var uzdot šādos veidos:

- *attēlu saraksts* - $\sigma \rightsquigarrow [\sigma(1), ..., \sigma(n)]$;
- *horizontālais pieraksts* - $\sigma \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$
- *funkcionālais grafs* ar vienu vai diviem kopas eksemplāriem.

1.4. piemērs. $n = 1$ - [1].
$n = 2$ - [12], [21].

$n = 3$ - [123], [213], [132], [321], [231], [312].

Kopā Σ_n var definēt *kompozīcijas* operāciju.

Permutācijas sadalījums ciklos

Permutāciju $\sigma : A \to A$ sauc par *ciklisku attēlojumu* vai *ciklu*, ja

- vai nu $|A| \geq 2$ un A elementus var sakārtot virknē $(a_1,\ldots,a_n)$ tā, ka $\sigma(a_i) = a_{i+1}$, $\sigma(a_n) = a_1$.
- vai arī $|A| = 1$ (A vienīgais elements a apmierina vienādību $\sigma(a) = a$).

1.4. teorēma. (permutācijas sadalījums ciklos) $\forall$ galīgas kopas A permutācijai σ $\exists$ viennozīmīgi noteikts A sadalījums $A_1, ..., A_m$ tāds, ka $\forall$ i σ kā A_i permutācija ir cikls.

1.5. piemērs. Permutāciju $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ var sadalīt divos ciklos $\{1, 5\} \cup \{2, 4, 3\}$ un apzīmēt kā (15)(243).

1.3.2. Permutācijas zīme

σ - n elementu kopas $\{1, 2, ..., n\}$ permutācija - $\sigma \in \Sigma_n$.

Pieņemsim, ka σ sadalījums ciklos satur m ciklus. Lielumu $d(\sigma) = n - m$ sauc par σ *dekrementu.* Lielumu

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{d(\sigma)} = (-1)^{n-m}$$

sauc par σ *zīmi (paritāti).*

1.3.3. Determinanta kombinatoriskā definīcija

1.5. teorēma. $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$. Tad

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}.$$

PIERĀDĪJUMS Grūts. ■

2. Determinanta lietojumi

2.1. Matricas invertēšana

2.1.1. Invertējamības kritērijs

$$\mathbf{A} \in GL(n,k) \iff \det \mathbf{A} \neq 0.$$

2.1.2. Inversās matricas determinants

2.1. teorēma. $\mathbf{A} \in GL(n,k) \implies \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A})^{-1}$.

PIERĀDĪJUMS

$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \implies \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{E} = 1 \implies$

$\det \mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} = \det(\mathbf{A})^{-1}$. ■

2.2. Krāmera formulas

Dota kvadrātveida LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\det \mathbf{A} \neq 0$.

$\mathbf{A}_j$ - matrica, kuru iegūst no $\mathbf{A}$ aizvietojot j-to kolonnu ar $\mathbf{b}$.

2.2. teorēma. (*Krāmera formulas*) $x_i = \dfrac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}$.

PIERĀDĪJUMS

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \implies \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(\mathbf{A}^{ap})\mathbf{b} =$$

$$\frac{1}{\det \mathbf{A}} \sum_{j=1} [\mathbf{A}^{ap}]_{ij}\mathbf{b}_j = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \underbrace{\sum_{j=1} (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ji}\mathbf{b}_j}_{\mathbf{A}_i \text{ izvirzījums } i\text{-tajā kolonnā}} \ . \blacksquare$$

2.1. piemērs. $\begin{cases} 2X_1 & -X_2 & = 4 \\ X_1 & +5X_2 & = 7 \end{cases}$, $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ \hline 1 & 5 \end{array}\right]$,

$\mathbf{A}_1 = \left[\begin{array}{c|c} 4 & -1 \\ \hline 7 & 5 \end{array}\right]$, $\mathbf{A}_2 = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 4 \\ \hline 1 & 7 \end{array}\right]$, $\begin{cases} X_1 = 27/11 \\ X_2 = 10/11. \end{cases}$

2.3. Ģeometriskā interpretācija

2.3.1. Pamatojums

Matricas rindas/kolonnas var interpretēt kā vektorus. Kas atbilst det?

2 vektoriem plaknē var konstruēt paralelogramu, 3 vektoriem telpā var konstruēt paralēlskaldni. Tiem ir noteikts laukums vai tilpums.

2.3.2. 2×2

2×2 gadījumā determinantu var interpretēt kā paralelograma laukumu.

2.3. teorēma. Doti 2 vektori $\vec{v} = (x_1, y_1)$ un $\vec{u} = (x_2, y_2)$. Paralelograma, kas ir "uzvilkts" uz šiem vektoriem, laukums ir S. Tad

$$S = \left| \det \left[\begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ \hline y_1 & y_2 \end{array} \right] \right|.$$

PIERĀDĪJUMS Var apskatīt paralelogramu 1.kvadrantā ar virsotnēm $(0,0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

$S = |A - B|$, kur

$$A = \underbrace{\frac{x_2 y_2}{2}}_{\text{trijstūris}} + \underbrace{x_1 \frac{y_2 + (y_1 + y_2)}{2}}_{\text{trapece}},$$

$$B = \underbrace{\frac{x_1 y_1}{2}}_{\text{trijstūris}} + \underbrace{x_2 \frac{y_1 + (y_1 + y_2)}{2}}_{\text{trapece}}.$$

$S = |A - B| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$. ■

2.3.3. 3×3

3×3 gadījumā determinantu var interpretēt kā paralēlskaldņa tilpumu.

2.4. teorēma. Doti 3 vektori $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{u} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$. Paralēlskaldņa, kas ir "uzvilkts" uz šiem vektoriem, tilpums ir V. Tad

$$V = \left| \det \left[\begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \right] \right|.$$

PIERĀDĪJUMS ■

3. 8.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

8.1 Atrast determinantus izmantojot izvirzījumu pēc rindas vai kolonnas.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & z & t \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} a & b & & \\ & a & b & \\ & & a & b \\ b & & & a \end{bmatrix}$

8.2 Atrast determinantu.

$$\begin{bmatrix} a & 1 & & \dots & \\ 1 & a & 1 & \dots & \\ & 1 & a & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ & & & 1 & a \end{bmatrix}.$$

(Norādījums: izsakiet matricas determinantu izmantojot izvirzījumu pēc rindas vai kolonnas un mazāku matricu determinantus).

8.3 Atrisināt LVS izmantojot Krāmera formulas.

(a) $\begin{cases} 3X_1 & -X_2 & = 4 \\ 2X_1 & +5X_2 & = 8. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} X_1 & -X_2 & +2X_3 & = -3 \\ 2X_1 & +3X_2 & -6X_3 & = 4 \\ X_1 & -3X_2 & -2X_3 & = 9. \end{cases}$

8.4 Matricām $\mathbf{A}$ un $\mathbf{A}^{-1}$ visi elementi ir veseli skaitļi. Ar ko var būt vienāds $\det \mathbf{A}$?

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

8.5 Atrast determinantus.

(a) $\left[\begin{array}{c|c|c|c} d & a & ... & a \\ \hline b & d & ... & a \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline b & b & ... & d \end{array}\right]$;

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & a & a & ... & a \\ \hline a & 0 & b & ... & b \\ \hline a & b & 0 & ... & b \\ \hline ... & ... & ... & ... & ... \\ \hline a & b & b & ... & 0 \end{array}\right]$;

(c) $[(a_i + a_j)^{n-1}]_{n,n}$.