

*DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE*  
*Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte*  
*Matemātikas katedra*  
*Bakalaura studiju programma "Matemātika"*

*Studiju kurss*

## Lineārā algebra I

### 7.lekcija

*Docētājs: Dr. P. Daugulis*

*2013./2014.studiju gads*

# Saturs

<b>1. Matricas determinants</b>	<b>4</b>
1.1. Definīcija . . . . .	4
1.1.1. Vēsturiskā pieeja . . . . .	5
1.1.2. Speciālgadījumi . . . . .	8
1.1.3. Vispārīga determinanta definīcija . . . . .	9
1.2. Īpašības . . . . .	10
1.2.1. Pamatteorēma . . . . .	10
1.2.2. Divu definīciju līdzvērtība $2 \times 2$ gadījumā . . . . .	14
1.3. Determinanta aprēķināšanas algoritmi . . . . .	16
1.3.1. Mazu izmēru matricas . . . . .	16
1.3.2. Triangulācijas algoritms . . . . .	16
<b>2. 7.mājasdarbs</b>	<b>19</b>
2.1. Obligātie uzdevumi . . . . .	19
2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi	20

**Lekcijas mērķis:**

- apgūt matricu determinanta jēdzienu, vienkāršākās īpašības un aprēķināšanas metodes.

**Lekcijas kopsavilkums:**

- var definēt funkciju - *determinantu*, kas invertējamai matricai piekārto nenulles skaitli;
- var pētīt determinantu īpašības.

**Svarīgākie jēdzieni:** determinants.

**Svarīgākie fakti un metodes:** elementāro matricu determinanti, determinanta īpašības, mazu izmēru matricu determinantu formulas, determinanta aprēķināšana ar triangulācijas metodi.

# 1. Matricas determinants

Kvadrātveida matricām var definēt un pētīt funkciju, kas kalpo kā *invertējamības indikators*.

$\forall n \in \mathbb{N}$  var definēt *determinanta* funkciju

$$\det : \text{Mat}(n, k) \longrightarrow k.$$

$$\mathbf{A} \longrightarrow \det(\mathbf{A}).$$

Determinanta pamatīpašība  $\det(\mathbf{A}) = 0 \iff \mathbf{A}$  nav invertējama.

## 1.1. Definīcija

Determinanta definēšanā ir vismaz divas pieejas:

- vēsturiskā pieeja - determinants tiek definēts kā matricas elementu funkcija, kas parādās saucējos, risinot kvadrātveida LVS.
- aksiomātiskā pieeja - determinants tiek definēts kā matricas elementu funkcija, kas apmierina noteiktas īpašības.

### 1.1.1. Vēsturiskā pieeja

Risinot kvadrātveida LVS, var ievērot, ka nezināmie ir racionālas funkcijas no sistēmas koeficientiem un brīvajiem locekļiem.

$$n = 1$$

$$\text{LVS } \left\{ a_{11}X_1 = b_1 \quad \exists \text{ atrisinājums, ja } a_{11} \neq 0: X_1 = \frac{b_1}{a_{11}}. \right.$$

$$\text{Varam definēt } \det [ a_{11} ] = a_{11} \implies X_1 = \frac{\det[b_1]}{\det[a_{11}]}.$$

$$n = 2$$

$$\text{Risināsim LVS } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = b_2. \end{cases}$$

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ \hline a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{c|c|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ \hline \frac{a_{21}}{a_{11}} & \frac{a_{22}}{a_{11}} & \frac{b_2}{a_{11}} \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ \hline 0 & a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}} & b_2 - a_{21} \frac{b_1}{a_{11}} \end{array} \right].$$

$$X_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

$$X_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

∃ tieši viens atrisinājums, ja  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ :

Varam definēt  $\det \left[ \begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array} \right] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \implies$

$$X_1 = \frac{\det \left[ \begin{array}{c|c} b_1 & a_{12} \\ \hline b_2 & a_{22} \end{array} \right]}{\det \left[ \begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array} \right]}, X_2 = \frac{\det \left[ \begin{array}{c|c} a_{11} & b_1 \\ \hline a_{21} & b_2 \end{array} \right]}{\det \left[ \begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array} \right]}$$

**1.1. piemērs.**  $\det \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \end{array} \right] = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3.$

$$n = 3$$

Ja atkārtotu risinājumu  $3 \times 3$  LVS, iegūtu šādu rezultātu:

$$X_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, \text{ kur}$$

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

**1.2. piemērs.**  $\det \left[ \begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 2 & -1 \end{array} \right] = 2 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \cdot 2 \\ - 0 \cdot 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot 2 = -21.$

Šādā veidā funkcijas  $\det$  var definēt visiem izmēriem  $n$ .

## 1.1.2. Speciālgadījumi

### Mazas $n$ vērtības

Mazām  $n$  vērtībām pieņemsim šādas det definīcijas:

- $n = 1 \implies \det [ a_{11} ] = a_{11};$

- $n = 2 \implies \det \left[ \begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array} \right] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$

- $n = 3 \implies$

$$\det \left[ \begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$



### 1.1.3. Vispārīga determinanta definīcija

$\forall n \in \mathbb{N}$  definēsim  $n \times n$  matricu determinanta funkciju

$$\det : \text{Mat}(n, k) \longrightarrow k$$

ar šādiem nosacījumiem:

1.  $\mathbf{A}$  nav invertējama  $\implies \det(\mathbf{A}) = 0$ .
2.  $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$ .
3.  $\det(\mathbf{E}_n) = 1$ .
4.  $\det(\mathbf{R}_{pq}) = -1, \forall p, q$ .
5.  $\det(\mathbf{R}_p(\lambda)) = \lambda, \forall p, \forall \lambda \in k$ .
6.  $\det(\mathbf{R}_{pq}(\lambda)) = 1, \forall p, q, \forall \lambda \in k$ .

$\det \mathbf{A}$  var aprēķināt saskaņā ar šādu algoritmu:

- $\mathbf{A}$  nav invertējama  $\implies \det \mathbf{A} = 0$ ;
- $\mathbf{A}$  ir invertējama,  $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_l$ , kur  $\mathbf{P}_i$  ir elementāra matrica  
 $\implies$

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{P}_1 \dots \det \mathbf{P}_l.$$

Jāpierāda, ka definīcija ir korekta: ja matricu var izteikt kā elementāro matricu reizinājumu divos dažādos veidos, tad determinants no tā nav atkarīgs.

**1.1. teorēma.**  $\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i$  - elementāras matricas.

$$\mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_u = \mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_v \implies \det(\mathbf{P}_1) \dots \det(\mathbf{P}_u) = \det(\mathbf{Q}_1) \dots \det(\mathbf{Q}_v).$$

PIERĀDĪJUMS Netiek dots, grūts. ■

## 1.2. Īpašības

### 1.2.1. Pamatteorēma

**1.2. teorēma.**

1. Mainot vietām divas matricas rindas vai kolonnas, matricas determinants maina zīmi.
2. Reizinot matricas rindu vai kolonnu ar  $\lambda$ , matricas determinants jāreizina ar  $\lambda$ .

3. Pieskaitot matricas rindai vai kolonnai citu rindu vai kolonnu, reizinātu ar  $\lambda$ , determinants nemainās.
4. Trijstūrveida matricas determinants ir vienāds ar galvenās diagonāles elementu reizinājumu.
5. Transponēšana nemaina determinantu.

### PIERĀDĪJUMS

1.  $\det(\mathbf{R}_{pq}\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{R}_{pq}) = \det(\mathbf{R}_{pq})\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A})$ .
2.  $\det(\mathbf{R}_p(\lambda)\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{R}_p(\lambda)) = \det(\mathbf{R}_p(\lambda))\det(\mathbf{A}) = \lambda\det(\mathbf{A})$ .
3.  $\det(\mathbf{R}_{pq}(\lambda)\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{R}_{pq}(\lambda)) = \det(\mathbf{R}_{pq}(\lambda))\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$ .

4. Apskatīsim augšēji trijstūrveida matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$\exists i : a_{ii} = 0 \implies$  galveno rūtiņu skaits  $\mathbf{A}$  pakāpienveida formā ir mazāks kā  $n \implies r(\mathbf{A}) < n \implies \det(\mathbf{A}) = 0 = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ .

Pieņemsim, ka  $\forall i : a_{ii} \neq 0$ .

Veiksim REP virkni  $\mathbf{R}_1\left(\frac{1}{a_{11}}\right), \mathbf{R}_2\left(\frac{1}{a_{22}}\right), \dots, \mathbf{R}_n\left(\frac{1}{a_{nn}}\right)$ . Iegūsim augšēji trijstūrveida matricu  $\mathbf{A}'$ , kurai uz galvenās diagonāles ir 1:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}') &= \det\left(\mathbf{R}_1\left(\frac{1}{a_{11}}\right)\mathbf{R}_2\left(\frac{1}{a_{22}}\right)\dots\mathbf{R}_n\left(\frac{1}{a_{nn}}\right)\mathbf{A}\right) = \\ &= \det\left(\mathbf{R}_1\left(\frac{1}{a_{11}}\right)\right)\det\left(\mathbf{R}_2\left(\frac{1}{a_{22}}\right)\right)\dots\det\left(\mathbf{R}_n\left(\frac{1}{a_{nn}}\right)\right)\det(\mathbf{A}) = \\ &= \frac{1}{a_{11}}\frac{1}{a_{22}}\dots\frac{1}{a_{nn}}\det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

$$\implies \det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \det(\mathbf{A}').$$

Veicot ar  $\mathbf{A}'$  KEĻ3 "no kreisās puses uz labo" sākot ar pēdējo rindu, iegūsim vienības matricu:

$$\mathbf{A}'\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\dots\mathbf{K}_l = \mathbf{E}_n \implies$$

$$\det(\mathbf{A}')\det(\mathbf{K}_1)\det(\mathbf{K}_2)\dots\det(\mathbf{K}_l) = \det(\mathbf{E}_n) = 1 \implies$$

$$\det(\mathbf{A}') = 1 \implies \det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

$$5. \mathbf{A} \notin GL(n, k) \iff \mathbf{A}^T \notin GL(n, k) \implies \det(\mathbf{A}) = 0 \iff \det(\mathbf{A}^T) = 0.$$

$$\mathbf{A} \in GL(n, k) \implies \mathbf{A} = \mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_l, \text{ kur } \mathbf{P}_i \text{ ir elementārās matricas} \\ \implies \mathbf{A}^T = \mathbf{P}_l^T \dots \mathbf{P}_1^T \implies \det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{P}_l^T) \dots \det(\mathbf{P}_1^T).$$

Ar visu gadījumu pārbaudi var pārlicināties, ka  $\forall$  elementārai matricai  $\mathbf{P}$ , izpildās  $\det(\mathbf{P}) = \det(\mathbf{P}^T) \implies$

$$\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{P}_l^T) \dots \det(\mathbf{P}_1^T) = \det(\mathbf{P}_l) \dots \det(\mathbf{P}_1) = \det(\mathbf{A}). \blacksquare$$

### 1.2.2. Divu definīciju līdzvērtība $2 \times 2$ gadījumā

Pierādīsim, ka matricai  $\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array} \right]$  determinants ir vienāds ar  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  izmantojot otro definīciju.

**Gadījums**  $a_{11} \neq 0$

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array} \right] = \mathbf{R}_1(a_{11}) \left[ \begin{array}{c|c} 1 & a_{12}/a_{11} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array} \right] =$$

$$= \mathbf{R}_1(a_{11})\mathbf{R}_{12}(-a_{21}) \left[ \begin{array}{c|c} 1 & (a_{12}/a_{11}) \\ \hline 0 & a_{22} - a_{21}(a_{12}/a_{11}) \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{R}_1(a_{11})) \det(\mathbf{R}_{12}(-a_{21})) \times$$

$$\times \det \left( \left[ \begin{array}{c|c} 1 & a_{12}/a_{11} \\ \hline 0 & a_{22} - a_{21}(a_{12}/a_{11}) \end{array} \right] \right) = a_{11} \times (a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}}) =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

**Gadījums**  $a_{11} = 0$

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array} \right] = \mathbf{R}_{12} \left[ \begin{array}{c|c} a_{21} & a_{22} \\ \hline 0 & a_{12} \end{array} \right]$$

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{R}_{12}) \det \left( \left[ \begin{array}{c|c} a_{21} & a_{22} \\ \hline 0 & a_{12} \end{array} \right] \right) =$$

$$= -a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

## 1.3. Determinanta aprēķināšanas algoritmi

### 1.3.1. Mazu izmēru matricas

Ja  $n \in \{1, 2, 3\}$ , tad  $n \times n$  matricas  $\mathbf{A}$  determinantu var atrast izmantojot zināmās formulas.

1.3. piemērs.  $\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 1 \end{array} \right].$

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 = -7.$$

### 1.3.2. Triangulācijas algoritms

$\mathbf{A}$  -  $n \times n$  matrica.

$\det(\mathbf{A})$  var aprēķināt saskaņā ar šādu algoritmu:

1. ar REP un KEP palīdzību pārveidot  $\mathbf{A}$  trijstūrveida formā:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{RAK} = \mathbf{T};$$



$$2. \text{ atrast } \det(\mathbf{T}) = t_{11}t_{22}\dots t_{nn};$$

$$3. \det(\mathbf{T}) = \det(\mathbf{R}) \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{K}) \implies$$

$$\det(\mathbf{A}) = \frac{\det(\mathbf{T})}{\det(\mathbf{R}) \det(\mathbf{K})}.$$

(lai atrastu  $\det(\mathbf{R})$  un  $\det(\mathbf{K})$ , jāizmanto determinanta multiplikatīvā īpašība).

### Ekvivalentais algoritma variants (soli pa solim)

1. Ar REP un KEP palīdzību pārveidot  $\mathbf{A}$  trijstūrveida formā, sekot determinanta izmaiņai pēc katra soļa:

- veicot REP1 vai KEP1 determinants maina zīmi:

$$\det(\mathbf{R}_{ij}\mathbf{A}) = -\det \mathbf{A},$$

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{K}_{ij}) = -\det \mathbf{A}.$$

- matricai var "iznest rindas vai kolonnas kopīgo reizinātāju"  
- izmantot REP2:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_i(\lambda)\mathbf{A}' \implies \det(\mathbf{A}) = \lambda \cdot \det(\mathbf{A}')$$

- veicot REP3 determinants nemainās:

$$\det(\mathbf{R}_{ij}(\lambda)\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}.$$

2. pēc tam, kad matrica  $\mathbf{A}$  ir pārveidota trijstūrveida formā, atrast determinantu kā diagonāles elementu reizinājumu.

## 2. 7.mājasdarbs

### 2.1. Obligātie uzdevumi

7.1 Atrast  $2 \times 2$  matricu determinantus izmantojot summu formulas.

$$(a) \left[ \begin{array}{c|c} 0.1 & 0.2 \\ \hline 0.4 & 0.8 \end{array} \right];$$

$$(b) \left[ \begin{array}{c|c} 1 & x \\ \hline y & xy \end{array} \right].$$

7.2 Atrast  $3 \times 3$  matricu determinantus izmantojot summu formulas.

$$(a) \left[ \begin{array}{c|c|c} 8 & 9 & 9 \\ \hline 4 & -9 & 7 \\ \hline 7 & -7 & -8 \end{array} \right];$$

$$(b) \left[ \begin{array}{c|c|c} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ \hline 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ \hline 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{array} \right];$$

$$(c) \left[ \begin{array}{c|c|c} 1 & a & b \\ \hline b & 1 & a \\ \hline a & b & 1 \end{array} \right].$$

7.3 Atrast matricu determinantus izmantojot triangulācijas algoritmu.

$$(a) \left[ \begin{array}{c|c} 5 & 3 \\ \hline 2 & -4 \end{array} \right];$$

$$(b) \left[ \begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 4 & 1 & 1 \end{array} \right];$$

$$(c) \left[ \begin{array}{c|c|c|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right].$$

7.4 Kāda var būt  $3 \times 3$  matricas determinanta maksimālā vērtība, ja matricas elementi pieder kopai  $\{0, 1\}$ .

## 2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

7.5 Atrast matricu determinantus.

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \quad \left[ \begin{array}{c|c|c|c}
 1 + x_1 & 1 + x_1^2 & \dots & 1 + x_1^n \\
 \hline
 1 + x_2 & 1 + x_2^2 & \dots & 1 + x_2^n \\
 \hline
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \hline
 1 + x_n & 1 + x_n^2 & \dots & 1 + x_n^n
 \end{array} \right]; \\
 \\
 \text{(b)} \quad \left[ \begin{array}{c|c|c|c}
 1 & x & \dots & x^{n-1} \\
 \hline
 x^{n-1} & 1 & \dots & x^{n-2} \\
 \hline
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \hline
 x & x^2 & \dots & 1
 \end{array} \right].
 \end{array}$$