*DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE*
*Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte*
*Matemātikas katedra*
*Bakalaura studiju programma "Matemātika"*

*Studiju kurss*

# Lineārā algebra I

## 6.lekcija

*Docētājs: Dr. P. Daugulis*

*2012./2013.studiju gads*

# Saturs



**Lekcijas mērķis:**

- apgūt invertējamu matricu īpašības un matricu invertēšanas metodi.

**Lekcijas kopsavilkums:**

- var definēt matricu invertējamības jēdzienus, kas vispārina skaitļu invertējamību,
- matricu invertējamības kritēriji ir saistīti ar matricas rangu,
- var pierādīt vairākas invertējamības un neinvertējamības īpašības un aprakstīt matricu invertēšanas algoritmu.

**Svarīgākie jēdzieni:** labā/kreisā inversā matrica, kvadrātveida matricas inversā matrica.

**Svarīgākie fakti un metodes:** inverso matricu eksistences kritērijs, invertējamu matricu īpašības, fundamentālā teorēma par invertējamām matricām, kvadrātveida LVS ar invertējamām sistēmas matricām, kvadrātveida matricu invertēšanas algoritms.

# 1. Matricu invertēšana

Matricām var definēt un pētīt operācijas, kas vispārina skaitļu invertēšanu $a \to \frac{1}{a}$. Ievērosim, ka skaitļiem $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, ja $a \neq 0$.

Matricu algebrā:

- skaitļa 1 analogs ir vienības matrica $\mathbf{E}$;
- ja ir dota matrica $\mathbf{A}$, var meklēt matricas, kuras reizinot ar $\mathbf{A}$ no labās vai kreisās puses, iegūsim vienības matricas.

## 1.1. Vienpusīgā invertēšana

### 1.1.1. Definīcija un īpašības

$\mathbf{A}$ ir $m \times n$ matrica.

$n \times m$ matrica $\mathbf{A}_L$ ir $\mathbf{A}$ *labā inversā matrica*, ja

$$\mathbf{A}\mathbf{A}_L = \mathbf{E}_m.$$

$n \times m$ matrica $\mathbf{A}_K$ ir $\mathbf{A}$ *kreisā inversā matrica*, ja

$$\mathbf{A}_K\mathbf{A} = \mathbf{E}_n.$$

**1.1. piezīme.** $\mathbf{A}_L$, $\mathbf{A}_K$ un vienības matricu izmēri ir noteikti viennozīmīgi.

**1.1. piemērs.** $\mathbf{A} = [a]$, $a \neq 0 \implies \mathbf{A}_K = \mathbf{A}_L = \left[\frac{1}{a}\right]$.

**1.1. teorēma.** $\mathbf{A}$ ir $m \times n$ matrica $\implies$

1. $\exists\ \mathbf{A}_L \iff r(\mathbf{A}) = m$,
2. $\exists\ \mathbf{A}_K \iff r(\mathbf{A}) = n$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\mathbf{A}$ ar REP var pārveidot rindu pakāpienveida formā: $\exists$ elementāru matricu reizinājums $\mathbf{R}$: $\mathbf{RA}$ ir rindu pakāpienveida matrica ar $r(\mathbf{A})$ rindām.

$$\exists\ \mathbf{A}_L \iff \mathbf{A}\mathbf{A}_L = \mathbf{E}_m \iff \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{A}_L = \mathbf{R}\mathbf{E}_m = \mathbf{R}.$$

Pieņemsim, ka $\mathbf{RA}$ nenulles rindu skaits $< m \implies$ matricai

$$\mathbf{RAA}_L = (\mathbf{RA})\mathbf{A}_L$$

nenulles rindu skaits arī $< m$ (apskatot matricu reizinājumu) - pretruna, jo labajā pusē $\mathbf{R}$ nenulles rindu skaits ir $m$.

$r(\mathbf{A}) = m$. Pierādīsim, ka $\exists\ \mathbf{A}_L$:

$$\mathbf{AA}_L = \mathbf{E}_m$$

Pieņemsim, ka $\mathbf{A}_L = [\mathbf{x}_1|...|\mathbf{x}_m] \implies \mathbf{AA}_L = [\mathbf{Ax}_1|...|\mathbf{Ax}_m]$.

Uzskatīsim $\mathbf{E}_m$ par kolonnu bloku matricu $\mathbf{E}_m = [\mathbf{e}_1|...|\mathbf{e}_m]$.

Apskatīsim vienādību

$$[\mathbf{Ax}_1|...|\mathbf{Ax}_m] = [\mathbf{e}_1|...|\mathbf{e}_m].$$

$\forall\ i$ LVS $\mathbf{Ax}_i = \mathbf{e}_i$ ir atrisināma, jo $\mathbf{A}$ pakāpienveida formā ir $m$ galvenās rūtiņas $\implies \mathbf{A}_L$ eksistē.

2. Apgalvojums par $\mathbf{A}_K$ tiek pierādīts līdzīgi apskatot $\mathbf{A}$ kolonnu pakāpienveida formu. ■

**1.2. teorēma.** $\mathbf{A}$ ir $m \times n$ matrica, $\exists\ \mathbf{A}_L, \exists\ \mathbf{A}_K \implies$

1. $m = n$,
2. $\mathbf{A}_L = \mathbf{A}_K$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\exists\ \mathbf{A}_L, \exists\ \mathbf{A}_K \implies r(\mathbf{A}) = m = n$.

2. $\exists\ \mathbf{A}_L, \exists\ \mathbf{A}_K, m = n \implies \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{A}_L = \mathbf{E}_m \\ \mathbf{A}_K\mathbf{A} = \mathbf{E}_m \end{cases} \implies$

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{A}_K\mathbf{E}_n = \mathbf{A}_K(\mathbf{A}\mathbf{A}_L) = (\mathbf{A}_K\mathbf{A})\mathbf{A}_L = \mathbf{E}_n\mathbf{A}_L = \mathbf{A}_L. \blacksquare$$

# 1.2. Kvadrātveida matricu invertēšana

## 1.2.1. Definīcija

Ja $n \times n$ matricai $\mathbf{A}$ $\exists$ *inversā matrica* $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}_K = \mathbf{A}_L$, tad $\mathbf{A}$ sauc par *invertējamu matricu.*

Visu invertējamu $n \times n$ matricu kopu ar elementiem laukā $k$ apzīmē ar $GL(n,k)$ (*general linear group*), $GL(n,k) \subsetneq \mathcal{M}at(n,n,k)$.

Ja kvadrātveida matricai neeksistē inversā matrica, to sauc par *neinvertējamu* (*singulāru, deģenerētu*).

## 1.2.2. Invertējamu matricu īpašības

**1.3. teorēma.**

1. $\mathbf{E}_n^{-1} = \mathbf{E}_n$.
2. $\mathbf{R}_{pq}^{-1} = \mathbf{R}_{pq}$.

3. $\mathbf{R}_p(\lambda)^{-1} = \mathbf{R}_p(\dfrac{1}{\lambda})$.

4. $\mathbf{R}_{pq}(\lambda)^{-1} = \mathbf{R}_{pq}(-\lambda)$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\mathbf{E}_n \underbrace{\mathbf{E}_n}_{\mathbf{E}_n^{-1}} = \mathbf{E}_n$.

2. Veicot REP1 divas reizes, iegūsim sākotnējo matricu $\Longrightarrow$

$$\mathbf{R}_{pq} \underbrace{\mathbf{R}_{pq}}_{=\mathbf{R}_{pq}^{-1}} = \mathbf{E}_m \Longrightarrow \mathbf{R}_{pq}^{-1} = \mathbf{R}_{pq}.$$

3. Veicot REP2 virkni $R_p(\lambda)$, $R_p(\frac{1}{\lambda})$, iegūsim sākotnējo matricu $\Longrightarrow$

$$\mathbf{R}_p(\frac{1}{\lambda})\mathbf{R}_p(\lambda) = \mathbf{E}_m \Longrightarrow \mathbf{R}_p(\lambda)^{-1} = \mathbf{R}_p(\frac{1}{\lambda}).$$

4. Veicot REP3 virkni $R_{pq}(\lambda)$, $R_{pq}(-\lambda)$, iegūsim sākotnējo matricu $\Longrightarrow$

$$\mathbf{R}_{pq}(-\lambda)\mathbf{R}_{pq}(\lambda) = \mathbf{E}_m \Longrightarrow \mathbf{R}_{pq}(\lambda)^{-1} = \mathbf{R}_{pq}(-\lambda).\blacksquare$$

**1.4. teorēma.** (*fundamentālā teorēma par invertējamām matricām*) $\mathbf{A}$ ir $n \times n$ matrica. Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.

1. $\exists\ \mathbf{A}_L$.
2. $\exists\ \mathbf{A}_K$.
3. $r(\mathbf{A}) = n$.
4. $\mathcal{H}(\mathbf{A}) = \mathbf{E}_n$.
5. $\mathbf{A}$ ir vienāda ar elementāro matricu reizinājumu.

PIERĀDĪJUMS 1., 2., 3. ir ekvivalenti saskaņā ar agrāk pierādītu teorēmu:

$$\exists\ \mathbf{A}_L \Longleftrightarrow r(\mathbf{A}) = n \Longleftrightarrow \exists\ \mathbf{A}_K$$

**3. $\Longrightarrow$ 4.**

$r(\mathbf{A}) = n \Longrightarrow \mathcal{H}(\mathbf{A})$ ir $n$ galvenās rūtiņas $\Longrightarrow \mathcal{H}(\mathbf{A}) = \mathbf{E}_n$.

**4. $\Longrightarrow$ 3.**

$r(\mathbf{E}_n) = n \Longrightarrow r(\mathbf{A}) = n$.

**3. $\Longrightarrow$ 5.**

$r(\mathbf{A}) = n \Longrightarrow$ $\mathbf{A}$ ar REP var pārveidot par Ermita matricu $\mathbf{E}_n$:

$$(\mathbf{R}_1 ... \mathbf{R}_l)\mathbf{A} = \mathbf{E}_n \Longrightarrow \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_1 ... \mathbf{R}_l\mathbf{A} = \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{E}_n \Longrightarrow$$

$$\mathbf{R}_2 ... \mathbf{R}_l\mathbf{A} = \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{E}_n \Longrightarrow ... \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{R}_l^{-1} ... \mathbf{R}_1^{-1}.$$

**5. $\Longrightarrow$ 3.**

$\mathbf{A}$ ir elementāro matricu reizinājums $\Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{Q}_1 ... \mathbf{Q}_u \Longrightarrow$

$$\mathbf{Q}_u^{-1} ... \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{Q}_u^{-1} ... \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{Q}_1 ... \mathbf{Q}_u = \mathbf{E}_n$$

$\Longrightarrow$ **A** ar REP palīdzību var pārvērst par $\mathbf{E}_n$ $\Longrightarrow$ $r(\mathbf{A}) = n$. ■

**1.2. piemērs.** Pārveidosim $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \end{array}\right]$ elementāro matricu reizinājumā.

$$\Big(\mathbf{R}_2(-1/2)\mathbf{R}_{21}(1)\mathbf{R}_{12}(-3)\Big)\mathbf{A} = \mathbf{E}_2 \Longrightarrow$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_{12}(-3)^{-1}\mathbf{R}_{21}(1)^{-1}\mathbf{R}_2(-1/2)^{-1} = \mathbf{R}_{12}(3)\mathbf{R}_{21}(-1)\mathbf{R}_2(-2) \Longrightarrow$$

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 3 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -2 \end{array}\right].$$

**1.5. teorēma.** **A** ir invertējama $n \times n$ matrica.

1. $\mathbf{A}^{-1}$ ir noteikta viennozīmīgi.
2. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.
3. $(\lambda\mathbf{A})^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}$, $\lambda \neq 0$.

4. $\mathbf{B}$ ir invertējama $n \times n$ matrica $\Longrightarrow$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

(inverējamu matricu reizinājums ir invertējam matrica)

PIERĀDĪJUMS

1. Pieņemsim, ka $\mathbf{A}$ $\exists$ divas inversās matricas $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ :

$$\mathbf{AX} = \mathbf{AY} = \mathbf{XA} = \mathbf{YA} = \mathbf{E}_n \Longrightarrow$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{XE}_n = \mathbf{X}(\mathbf{AY}) = (\mathbf{XA})\mathbf{Y} = \mathbf{E}_n\mathbf{Y} = \mathbf{Y}.$$

2. $\underbrace{\mathbf{A}}_{(\mathbf{A}^{-1})^{-1}} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n.$

3. $(\lambda\mathbf{A})(\frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}) = (\lambda \cdot \frac{1}{\lambda})(\mathbf{AA}^{-1}) = \mathbf{E}_n.$

4. $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\underbrace{\mathbf{BB}^{-1}}_{=\mathbf{E}_n})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}_n.$

■

**1.2. piezīme.** Invertējamu matricu summa var nebūt invertējama - $GL(n, k)$ nav slēgta attiecībā uz saskaitīšanu:

$$\mathbf{E}_n + (-\mathbf{E}_n) = \mathbf{O}_n.$$

Neinvertējamu matricu summa var būt invertējama:

$$\mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{22} = \mathbf{E}_2.$$

### 1.2.3. Kvadrātveida matricas invertēšanas algoritms

Aprakstīsim *bloku invertēšanas algoritmu (Gausa-Žordāna algoritmu)*, ar kuru var atrast invertējamas $n \times n$ matricas $\mathbf{A}$ inverso matricu $\mathbf{A}^{-1}$.

**Algoritma pamatideja**

$\mathbf{A}$ ir invertējama $\Longrightarrow$ $\mathbf{A}$ ar REP var pārvērst Ermita matricā $\mathbf{E}_n$:

$$\underbrace{\mathbf{R}_1 ... \mathbf{R}_l}_{=\mathbf{A}^{-1}} \mathbf{A} = \mathbf{E}_n.$$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{R}_1 ... \mathbf{R}_l$ ir vienāds ar REP virknes pielietošanas rezultātu attiecībā uz $\mathbf{E}_n$.

Problēma ir pēc iespējas ērtāk aprēķināt reizinājumu $\mathbf{R}_1 ... \mathbf{R}_l$, ko var veikt ar atbilstošas bloku matricas palīdzību.

**Algoritms**

1. Definēsim bloku matricu $\mathbf{B} = [\mathbf{E}_n|\mathbf{A}]$.
2. Veiksim ar $\mathbf{B}$ REP tā, lai otrajā blokā iegūtu $\mathbf{E}_n$, šī soļa rezultātā tiks iegūta bloku matrica $[\mathbf{X}|\mathbf{E}_n]$, kur $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$.

**1.3. piemērs.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Konstruējam bloku matricu

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right].$$

Ar REP virkni $R_{12}(2)$, $R_2(1/7)$, $R_{21}(-2)$ pārveidosim šo matricu formā

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3/7 & -2/7 & 1 & 0 \\ 2/7 & 1/7 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Redzam, ka $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & -2/7 \\ 2/7 & 1/7 \end{bmatrix}$.

### 1.2.4. Matricu invertējamības lietojumi LVS risināšanā

**1.6. teorēma.** $\mathbf{A}$ ir $n \times n$ matrica. Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.

1. $\exists\ \mathbf{A}^{-1}$.
2. LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ $\exists$ tieši viens atrisinājums $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
3. LVS $\mathbf{Ax} = 0$ $\exists$ tikai triviālais atrisinājums $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

PIERĀDĪJUMS

$\underline{1 \implies 2}$

$\exists\ \mathbf{A}^{-1} \implies \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \implies \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ - viennozīmīgi noteikts atrisinājums.

$\underline{2 \implies 3}$

LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ $\exists$ viens atrisinājums $\implies r(\mathbf{A}) = n \implies$ LVS $\mathbf{Ax} = 0$ $\exists$ tikai triviālais atrisinājums.

$\underline{3 \implies 1}$

LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ $\exists$ tikai triviālais atrisinājums $\implies r(\mathbf{A}) = n \implies$ $\exists\ \mathbf{A}^{-1}$. ■

# 2. 6.mājasdarbs

## 2.1. Obligātie uzdevumi

6.1 Pierādīt, ka matricai

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 2 & -3 & 1 & 7 \\ \hline 1 & 1 & 5 & 12 \\ \hline -4 & 11 & 7 & 3 \end{array}\right]$$

neeksistē ne labā, ne kreisā inversā matrica.

6.2 Atrast inversās matricas, ja tās eksistē:

(a) $\left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ \hline -3 & 6 \end{array}\right]$,

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 3 \\ \hline -3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$,

(c) $\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$.

6.3 Atrast inversās matricas:

(a) $\left[\begin{array}{c|c} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \hline -\sin\alpha & \cos\alpha \end{array}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} a & 0 & 0 \\ \hline 1 & a & 0 \\ \hline 0 & 1 & a \end{array}\right]$, $a \in \mathbb{C}$.

6.4 Atrisināt kvadrātveida LVS $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ izmantojot matricu invertēšanas metodi: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

(a) $\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 = 1, \\ X_1 - 6X_2 = -1. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} X_1 + 3X_2 + X_3 = 1, \\ X_1 - 2X_2 + X_3 = -1, \\ X_1 - X_2 + 4X_3 = -2. \end{cases}$

6.5 Atrast vismaz vienu matricas $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & -1 \\ \hline 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$ labo inverso matricu vai pierādīt, ka tāda neeksistē.

6.6 Kvadrātveida matricu $\mathbf{A}$ sauc par *nilpotentu*, ja eksistē $n \in \mathbb{N}:$ $\mathbf{A}^n = \mathbf{O}$.

(a) Pierādīt, ka nilpotenta matrica nevar būt invertējama.

(b) Pierādīt, ka ja $\mathbf{A}$ ir nilpotenta, tad $\mathbf{E} + \mathbf{A}$ ir invertējama, atrast $(\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}$.

## 2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

6.7 $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m,k}$. Pierādīt, ka matricu vienādojums $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ir atrisināms $\iff$ $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}|\mathbf{B}])$.

6.8 Izpētīt matricu vienādojuma $\mathbf{AXC} = \mathbf{B}$ atrisināmību atkarībā no matricām $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ un $\mathbf{C}$.