DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

5.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt matricu normālās formas un rangu jēdzienus.

Lekcijas kopsavilkums:

- ar kolonnām var veikt kolonnu elementāros pārveidojumus (KEP),
- ar REP un KEP matricu var pārveidot maksimāli vienkāršotā formā - normālajā formā,
- galveno rūtiņu skaits pakāpienveida formā ir svarīgs matricas invariants - rangs, kas nemainās veicot REP un KEP.

Svarīgākie jēdzieni: kolonnu elementārie pārveidojumi (KEP) un to elementārās matricas, matricas normālā forma, rindu rangs, kolonnu pakāpienveida un Ermita formas, kolonnu rangs, rangs.

Svarīgākie fakti un metodes: KEP īpašības, algoritms matricas pieveidošanai normālā formā, Ermita formas vienīgums, rangu vienādība, normālās formas vienīgums, matricas ranga īpašības.

1. Matricas rangi

1.1. Matricas rindu rangs

1.1.1. Matricas Ermita formas vienīgums

1.1. piezīme. Matricas normalizētā pakāpienveida forma nav noteikta viennozīmīgi: $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array}\right]$ var pārveidot normalizētajā pakāpienveida formā vismaz divos veidos:

- $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$,
- $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 5/4 & 3/2 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$, mainot rindas pirmajā solī.

Abas pakāpienveida matricas pārveidojas uz vienu Ermita matricu $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$.

1.1. teorēma. Katru matricu ar REP palīdzību var pārveidot uz viennozīmīgi noteiktu matricu Ermita formā (matricas Ermita forma ir viennozīmīgi noteikta).

PIERĀDĪJUMS

SĀKSIM MĀCĪTIES JAUNU METODI - MATEMĀTISKO INDUKCIJU. Izmantosim matemātisko indukciju ar parametru n (kolonnu skaits).

Indukcijas bāze $n = 1 \implies$ apgalvojums ir patiess, jo Ermita forma ir $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$, ja matrica ir $\mathbf{O}_{m,1}$ vai $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$.

Indukcijas solis Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess visām matricām, kuru kolonnu skaits ir stingri mazāks nekā n un pierādīsim, ka tad apgalvojums ir patiess, ja kolonnu skaits ir vienāds ar n.

Pieņemsim, ka $\exists\ m \times n$ matrica $\mathbf{A}$, kurai ir dažādas Ermita formas $\mathbf{H}_1$ un $\mathbf{H}_2$. Sadalīsim Ermita formas blokos:

$$\mathbf{H}_1 = [\mathbf{F}_1 | \mathbf{k}_1],$$

$$\mathbf{H}_2 = [\mathbf{F}_2 | \mathbf{k}_2].$$

Bloki $\mathbf{F}_1$ un $\mathbf{F}_2$ arī ir Ermita matricas, jo nogriežot pēdējo kolonnu Ermita matricas īpašība saglabājas.

Ja $\mathbf{A} = [\mathbf{B}|\mathbf{c}]$, kur $\mathbf{c}$ - pēdējā kolonna, tad $\mathbf{B}$ var pārveidot gan uz Ermita formu $\mathbf{F}_1$, gan uz Ermita formu $\mathbf{F}_2$. Saskaņā ar indukcijas pieņēmumu $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}$.

Jāpierāda, ka $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$.

Domāsim par sākotnējo matricu $\mathbf{A}$ kā par LVS paplašināto matricu. Ir iespējami divi gadījumi.

<u>$\mathbf{A}$ atbilst nesaderīgai LVS.</u>

Tad pēdējā kolonnā (brīvo locekļu kolonnā) ir nenulles skaitlis zem $\mathbf{F}$ zemākās nenulles rindas $\Longrightarrow$ $\mathbf{A}$ Ermita formā pēdējā kolonnā ir 1 vienā noteiktā vietā $\Longrightarrow$ $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$.

<u>$\mathbf{A}$ atbilst saderīgai LVS.</u>

$\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2$ $\Longrightarrow$ vismaz vienā LVS vienādojumā iegūsim pretrunu:

$$a_{i1}X_1 + ... + a_{in}X_n = \underbrace{b_i}_{\text{no } \mathbf{k}_1} \neq \underbrace{b'_i}_{\text{no } \mathbf{k}_2} . \blacksquare$$

Matricas $\mathbf{A}$ Ermita formu apzīmēsim ar $\mathcal{H}(\mathbf{A})$.

1.1.2. Rindu ranga definīcija

1.2. teorēma. Matricas pakāpienveida formas galveno rūtiņu skaits un adreses ir noteiktas viennozīmīgi (neatkarīgi no REP izvēles).

PIERĀDĪJUMS Matricas Ermita forma tiek iegūta no normalizētas pakāpienveida formas veicot REP uz augšu, izmantojot jau esošās galvenās rūtiņas. Šajos REP galvenās rūtiņas nemainās.

Matricas Ermita forma ir noteikta viennozīmīgi $\Longrightarrow$ galveno rūtiņu skaits un adreses ir noteiktas viennozīmīgi. ■

Par matricas **A** *rindu rangu* $rr(\boldsymbol{A})$ sauc galveno rūtiņu skaitu jebkurā **A** pakāpienveida formā.

Lai atrastu $rr(\mathbf{A})$, pietiek pārveidot **A** pakāpienveida formā un saskaitīt galvenās rūtiņas.

1.2. Matricas kolonnu elementārie pārveidojumi un kolonnu rangs

1.2.1. Kolonnu elementārie pārveidojumi

Ar matricu kolonnām var definēt trīs veidu *kolonnu elementāros pārveidojumus (KEP)* un atbilstošās elementārās matricas, kuras iegūst, veicot kolonnu pārveidojumu matricai $\mathbf{E}_n$:

- KEP1 K_{pq} - p-tās un q-tās kolonnas apmaiņa, $\mathbf{K}_{pq} = \mathbf{R}_{pq}$.

- KEP2 $K_p(\lambda)$, $\lambda \neq 0$ - p-tās kolonnas reizināšana ar λ, $\mathbf{K}_p(\lambda) = \mathbf{R}_p(\lambda)$.
- KEP3 $K_{pq}(\lambda)$ - p-tās kolonnas reizināšana ar λ un pieskaitīšana q-tajai kolonnai,

$$\mathbf{K}_{pq}(\lambda) = \mathbf{R}_{pq}(\lambda)^T = \mathbf{R}_{qp}(\lambda).$$

1.1. piemērs. $\mathbf{K}_{12}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \lambda \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \mathbf{R}_{12}(\lambda)^T = \mathbf{R}_{21}(\lambda).$

1.3. teorēma.

1. KEP P ar pārveidojuma matricu $\mathbf{P}$ atbilst matricu pārveidojumam $\mathbf{L} \to \mathbf{LP}$.
2. KEP ir invertējami;
   (a) $\mathbf{K}_{pq}^{-1} = \mathbf{K}_{pq}$,
   (b) $\mathbf{K}_p(\lambda)^{-1} = \mathbf{K}_p(1/\lambda)$,
   (c) $\mathbf{K}_{pq}(\lambda)^{-1} = \mathbf{K}_{pq}(-\lambda)$.

PIERĀDĪJUMS

1. Katrā gadījumā var tikt veikta tieša pārbaude.

2. Pierāda līdzīgi rindu pārveidojumiem. ■

1.2.2. Matricas kolonnu pakāpienveida forma, kolonnu Ermita forma un kolonnu rangs

Par *kolonnas nuļļu indeksu* sauksim maksimālas nepārtrauktas nuļļu virknes garumu, kas sākas no augšas.

Matrica ir

- *kolonnu pakāpienveida formā*, ja kolonnu nuļļu indeksi palielinās, palielinoties kolonnas indeksam,
- *kolonnu Ermita formā*, tā ir kolonnu pakāpienveida formā un pa kreisi no katras galvenās rūtiņas ir tikai 0.

Uz šīm formām matricu var pārveidot veicot tikai KEP. Atšķirība no rindu pakāpienveida formas algoritma - tiek mainīti vietām rindu un kolonnu indeksi.

1.2. piezīme. KEP ar $\mathbf{A}$ ir tas pats, kas REP ar $\mathbf{A}^T$.

1.2. piemērs. $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -3 & 1 \\ \hline 4 & -12 & 4 \\ \hline -3 & 10 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \end{array}\right].$

KEP virkne: $K_{12}(3)$, $K_{13}(-1)$, $K_{23}(-2)$.

KEP gadījumā ir spēkā tādi paši rezultāti kā REP gadījumā:

- $\forall$ matricu var pārveidot kolonnu pakāpienveida formā,
- matricas $\mathbf{A}$ kolonnu Ermita forma $\mathcal{H}_K(\mathbf{A})$ ir noteikta viennozīmīgi,
- galveno rūtiņu skaits un adreses ir noteiktas viennozīmīgi (neatkarīgi no KEP izvēles).

Par matricas $\mathbf{A}$ *kolonnu rangu* $rk(\boldsymbol{A})$ sauc galveno rūtiņu skaitu jebkurā kolonnu Ermita formā.

1.3. piemērs. $rr(\mathbf{E}_n) = rk(\mathbf{E}_n)$.

1.3. Matricas rangs

1.3.1. Matricas normālā forma

Kādus KEP var veikt ar Ermita matricu, lai iegūtu pēc iespējas vairāk nuļļu?

$m \times n$ matrica ir *normālajā formā*, ja tā ir bloku matricas formā

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_r & \mathbf{O}_{r,n-r} \\ \hline \mathbf{O}_{m-r,r} & \mathbf{O}_{m-r,n-r} \end{array}\right].$$

Ja vismaz viens no matricu izmēriem ir vienāds ar 0, tad uzskatām, ka matrica ir tukša.

1.4. piemērs. $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$. $\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$. $\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$.

1.4. teorēma. $\forall$ matricu ar REP un KEP var pārveidot normālajā formā.

PIERĀDĪJUMS Dota $m \times n$ matrica $\mathbf{A}$. Pārveidosim $\mathbf{A}$ normālajā formā izmantojot šādu algoritmu

1. Ar REP pārveidojumiem pārveidosim $\mathbf{A}$ Ermita formā $\mathcal{H}(\mathbf{A})$.
2. Sākot no augšas ar katru galveno rūtiņu anulēsim visus citus nenulles elementus tās rindā veicot KEP3 "pa labi" un pārveidosim $\mathcal{H}(\mathbf{A})$ par matricu $\mathbf{B}$, kurā tikai galveno rūtiņu elementi nav 0.

3. Veicot KEP1 pārveidosim $\mathbf{B}$ normālajā formā

$$\mathbf{N} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_r & \mathbf{O}_{n-r} \\ \hline \mathbf{O}_{m-r} & \mathbf{O}_{m-r,n-r} \end{array}\right]. \blacksquare$$

1.5. piemērs. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & -2 \\ 3 & 9 & -11 & -5 \\ 2 & 6 & -7 & -3 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & & \\ & 1 & \\ \hline & & \end{array}\right].$

Pārveidojumu virkne $R_{12}(-3)$, $R_{13}(-2)$, $R_{23}(-1)$, $R_{21}(4)$, $K_{14}(-2)$, $K_{12}(-3)$, $K_{34}(-1)$, K_{23}.

1.3.2. Matricas rangs un tā īpašības

1.5. teorēma.

1. $\forall$ $\mathbf{A}$ $rr(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A})$.
2. Ar REP un KEP matricu var pārveidot uz viennozīmīgi noteiktu normālo formu (matricas normālā forma ir noteikta viennozīmīgi).

PIERĀDĪJUMS. REP un KEP saglabā abus rangus - šis fakts tiek dots bez pierādījuma.

1. Ar REP un KEP $\mathbf{A}$ var pārveidot normālajā formā, kurā abi rangi sakrīt.

2. REP un KEP saglabā abus rangus $\Longrightarrow$ jebkurām divām dotās matricas normālajām formām ir vienāds rangs $\Longrightarrow$ tās sakrīt. ■

Matricas $\mathbf{A}$ normālo formu apzīmēsim ar $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.
Par matricas $\mathbf{A}$ *rangu* $r(\boldsymbol{A})$ sauc $rr(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A})$.

Lai atrastu matricas rangu, pietiek atrast tās rindu vai kolonnu rangu ņemot vērā šādus faktus:

- visi elementārie pārveidojumi saglabā rangu;
- rangs ir vienāds ar galveno rūtiņu skaitu jebkurā no šādam matricas formām:
  - rindu vai kolonnu pakāpienveida formā,

  – rindu vai kolonnu Ermita formā,
  – normālajā formā;

- matricu formas, kurās tiek skaitītas galvenās rūtiņas, var būt arī ne obligāti normalizētas.

1.6. teorēma.

1. $\mathbf{A}$ - $m \times n$ matrica $\Longrightarrow$ $r(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.
2. $r(\lambda\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$, ja $\lambda \neq 0$.
3. $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T)$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\begin{cases} r(\mathbf{A}) = rr(\mathbf{A}) \leq m \\ r(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) \leq n \end{cases} \Longrightarrow r(\mathbf{A}) \leq \min(m, n).$

2. $\mathbf{A}$ un $\lambda\mathbf{A}$ var pārveidot pakāpienveida formā ar vienu un to pašu REP virkni.

3. $r(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) = rr(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A}^T)$. ■

2. 5.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

5.1 Pārveidot matricas kolonnu pakāpienveida un kolonnu Ermita formā.

(a) $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline 4 & 2 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$

5.2 Pārveidot matricas normālajā formā. Atrast REP un KEP matricas.

(a) $\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$.

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$.

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

5.3 Atrast matricu rangus.

(a) $\begin{bmatrix} -12 & 4 & 8 & 8 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

5.4 Atrast matricu rangus atkarībā no parametriem.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 2 & -2 & \beta \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & 1 \end{bmatrix}$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

5.5 Pierādīt nevienādības

(a) $r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) - n \leq r(\mathbf{AB}) \leq \min\Big(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\Big)$, kur n - **A** rindu skaits;

(b) $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$;

(c) $r([\mathbf{A}|\mathbf{B}]) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$.

5.6 Pierādīt, ka $\forall$ $m \times n$ matricu $\mathbf{A}: \ r(\mathbf{A}) = 1$, var izteikt formā $\mathbf{A} = \mathbf{KR}$, kur **K** ir $m \times 1$ matrica (kolonna), **R** ir $1 \times n$ matrica (rinda). Atrast **K** un **R**, ja ir dota **A**.

5.7 Dots, ka $r(\mathbf{A}) = r$. Pierādīt, ka

(a) **A** var izteikt kā r matricu summu, kurām rangs ir 1,

(b) **A** nevar izteikt kā mazāk kā r matricu summu, kurām rangs ir 1.

5.8 Atrast rangu matricai

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} a_1b_1 & a_1b_2 & ... & a_1b_n \\ \hline a_2b_1 & a_2b_2 & ... & a_2b_n \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline a_nb_1 & a_nb_2 & ... & a_nb_n \end{array}\right].$$

5.9 Matricu sauc par *kvazinormālu*, ja tā ir formā

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_r(\lambda) & \mathbf{O}_{n-r} \\ \hline \mathbf{O}_{m-r} & \mathbf{O}_{m-r,n-r} \end{array}\right], \lambda \neq 0.$$

(a) Pierādīt, ka jebkuru matricu var pārveidot kvazinormālā formā veicot tikai REP3 un KEP3.

(b) Pierādīt, ka kvadrātveida matricu ar pilnu rangu var pārveidot kvazinormālā formā veicot tikai REP3.

5.10 Telpā ir dotas 4 taisnes. Kādos gadījumos eksistē kāda taisne, kas krusto visas 4 dotās taisnes?