DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

4.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt LVS risināšanas metodes - Gausa un Gausa-Ermita metodi.

Lekcijas kopsavilkums:

- ar rindu elementārajiem pārveidojumiem matricas var pārveidot formās, kuras var izmantot LVS risināšanā.

Svarīgākie jēdzieni: matricas pakāpienveida forma, normalizēta pakāpienveida forma, galvenās rūtiņas, galvenie nezināmie, brīvie nezināmie, vispārīgais atrisinājums, partikulārais atrisinājums.

Svarīgākie fakti un metodes: algoritms matricas pārveidošanai pakāpienveida formā, Gausa metode, algoritms matricas pārveidošanai Ermita formā, Gausa-Ermita metode, LVS atrisinājumu īpašības.

1. Lineāru vienādojumu sistēmu risināšana

1.1. Gausa metode

1.1.1. Matricas un LVS pakāpienveida forma

Par matricas rindas *nuļļu indeksu* sauc nepārtrauktas nuļļu virknes garumu, kas sākas no rindas kreisās malas.

1.1. piemērs. Rindai $[0|0|3|1]$ nuļļu indekss ir 2. Rindai $[1|2|4|2]$ nuļļu indekss ir 0.

Matrica ir *pakāpienveida formā*, ja tās rindu nuļļu indeksu virkne ir augoša. Citiem vārdiem sakot, šādai matricai nuļļu virknes, kas sākas rindas augšējā kreisajā stūrī, kļūst arvien garākas.

1.2. piemērs. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Pakāpienveida matricas katras rindas pirmās rūtiņās no kreisās puses, kurās ir nenulles elementi, sauc par *galvenajām rūtiņām.*

Pakāpienveida matrica, kurai visu galveno rūtiņu elementi ir vienādi ar 1, ir *normalizētā pakāpienveida formā.*

1.3. piemērs. $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$

LVS sistēmas matrica vai paplašinātā matrica ir normalizētā pakāpienveida formā $\Longrightarrow$

- katrs nākamais LVS vienādojums satur mazāk nezināmo nekā iepriekšējais - daži nezināmie tiek *izslēgti* un
- pirmais nenulles koeficients no kreisās malas katrā vienādojumā ir 1.

LVS šādā formā šķiet ērtākas risināšanā, jo var mēģināt sākt risināšanas procesu ar tiem vienādojumiem, kas satur mazāk nezināmo.

1.4. piemērs.
$$\begin{cases} X_1 & -X_2 & +3X_3 & +2X_4 & =1 \\ 4X_1 & -4X_2 & +13X_3 & +10X_4 & =5 \\ 3X_1 & -3X_2 & +10X_3 & +9X_4 & =8 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} X_1 & -X_2 & +3X_3 & +2X_4 & =1 \\ & & X_3 & +2X_4 & =1 \\ & & & X_4 & =4 \end{cases}$$

1.1. teorēma. $\forall$ matricu ar REP var pārveidot normalizētajā pakāpienveida formā.

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim teorēmu konstruktīvi - aprakstīsim algoritmu, ar kura palīdzību $\forall$ matricu $\mathbf{L}$ var pārveidot normalizētajā pakāpienveida formā.

Algoritma realizācijas gaitā ar EP palīdzību tiek mainīti matricas elementi.

Algoritma apraksts:

- atrodam pirmo kolonnu no kreisās puses, kurā ir vismaz viens nenulles elements, ar REP1 pārvietojam to uz augšējo stūri, ar REP2 pārveidojam par 1, nosaucam par *1.galveno rūtiņu*, ar REP3 anulējam ar to visus elementus zem tās, pārejam uz apakšmatricu par vienu rindu zemāk, ...,
- atkārtojam aprakstītās darbības tik ilgi, kamēr kārtējā apakšmatrica nav nulles matrica vai tukša. ■

1.1. piezīme. $\forall$ REP P var realizēt ar matricu reizināšanas palīdzību $\Longrightarrow$ $\forall$ matricai $\mathbf{A}$ $\exists$ elementāras matricas $\mathbf{P}_1, ..., \mathbf{P}_k$:

$$\mathbf{P}_k \cdot ... \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A} \text{ ir pakāpienveida formā.}$$

1.1.2. Algoritms

Viena no senākajām LVS risināšanas metodēm, Gausa (C.F.Gauß) metode, sastāv no šādiem soļiem:

1. Pārveidojam LVS paplašināto matricu $\mathbf{L}$ normalizētā pakāpienveida formā $\widetilde{\mathbf{L}}$.
2. Pārrakstām iepriekšējā solī iegūto matricu $\widetilde{\mathbf{L}}$ LVS veidā. Paplašinātās matricas rindas, kas satur tikai nulles, tiek ignorētas.
3. Nezināmos, kuru indeksi sakrīt ar galveno rūtiņu kolonnu numuriem, saucam par *galvenajiem nezināmajiem*, pārējos - par *brīvajiem nezināmajiem.*
4. Izsakām galvenos nezināmos, izmantojot brīvos nezināmos, ejot no pēdējā galvenā nezināmā līdz pirmajam. LVS atrisinājumu kopa ir visas skaitļu virknes, kurās brīvie nezināmie ir neatkarīgi parametri (var pieņemt jebkuras vērtības) un galvenie nezināmie ir izteikti, izmantojot brīvos nezināmos.

1.5. piemērs. Atrisināsim ar Gausa metodi LVS

$$\left\{\begin{array}{cccccc} X_1 & -X_2 & -2X_3 & -4X_4 & -3X_5 & =-1 \\ X_1 & -X_2 & & +2X_4 & -X_5 & =1 \\ 2X_1 & -2X_2 & -3X_3 & -5X_4 & -7X_5 & =-5. \end{array}\right.$$

Ar REP $R_{13}(-2)$, $R_{12}(-1)$, $R_2(1/2)$, $R_{23}(-1)$, $R_3(-1/2)$ paplašināto matricu var pārveidot normalizētā pakāpienveida formā

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -2 & -4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

kas atbilst LVS

$$\begin{cases} X_1 & -X_2 & -2X_3 & -4X_4 & -3X_5 & = -1 \\ & & X_3 & +3X_4 & +X_5 & = 1 \\ & & & & X_5 & = 2. \end{cases}$$

Risinot šo LVS sākot no pēdējā vienādojuma, iegūsim

$$X_5 = 2,$$

$$X_3 = 1 - X_5 - 3X_4 = -1 - 3X_4,$$

$$X_1 = -1 + X_2 + 2X_3 + 4X_4 + X_5 =$$
$$-1 + X_2 + 2(-1 - 3X_4) + 4X_4 + 6 = 3 + X_2 - 2X_4.$$

LVS risināšanā ir iespējami trīs dažādi gadījumi:

- galvenā rūtiņa pēdējā rindā - LVS satur vienādojumu $0 = 1$ - LVS nav atrisinājumu (atrisinājumu kopa ir tukša, LVS nav saderīga),
- ja LVS ir saderīga, un tai nav brīvo nezināmo, tad tai ir viens atrisinājums (LVS ir viennozīmīgi atrisināma),
- ja LVS ir saderīga, un tai ir brīvie nezināmie, tad tai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu (atrisinājumu kopa ir bezgalīga), formulu sistēma, kas apraksta galvenos nezināmos kā funkcijas no brīvajiem nezināmajiem, sauc par *LVS vispārīgo atrisinājumu*, piešķirot brīvajiem nezināmajiem konkrētas vērtības, iegūst *partikulāru atrisinājumu.*

1.2. teorēma.
Ar Gausa metodi tiek atrasti visi LVS atrisinājumi.

PIERĀDĪJUMS.
Sistēmas ar paplašinātajām matricām $\mathbf{L}$ un $\widetilde{\mathbf{L}}$ ir ekvivalentas.

Katra skaitļu virkne, kas tiek atrasta ar Gausa metodi, ir LVS atrisinājums, jo tā apmierina visus vienādojumus.

Ja virkne ir LVS atrisinājums, tad tā apmierina visus pakāpienveida LVS vienādojumus, tāpēc tā pieder ar Gausa metodi iegūto virkņu kopai. ■

1.2. Gausa-Ermita metode

Vai nav iespējams turpināt nezināmo izslēgšanu pat pēc LVS pakāpienveida formas iegūšanas?

Kādus rindu EP vēl var veikt ar pakāpienveida matricu, lai to "nesabojātu" un iegūtu vairāk nuļļu (izslēgtu vairāk nezināmo)?

1.2.1. Matricas un LVS Ermita forma

Matrica ir *Ermita formā (Hermite)*, ja

- tā ir normalizētajā pakāpienveida formā,
- virs katras galvenās rūtiņas esošajās rūtiņās ir tikai 0.

LVS paplašinātā matrica ir Ermita formā $\Longrightarrow$ katrs galvenais nezināmais tiek izslēgts no visiem vienādojumiem, izņemot vienu.

1.6. piemērs. Jebkura diagonāla matrica, vienības matricas $\mathbf{E}_m$.

$$\begin{bmatrix} 1 & \star & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \star \end{bmatrix}.$$

1.3. teorēma. $\forall$ matricu ar REP var pārveidot Ermita formā.

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim teorēmu konstruktīvi - aprakstīsim algoritmu, ar kura palīdzību jebkuru matricu $\mathbf{L}$ var pārveidot Ermita formā.

1.solis Pārveidojam $\mathbf{L}$ normalizētajā pakāpienveida formā $\widetilde{\mathbf{L}}$.

2.solis Veicot REP3 "uz augšu", anulējam nenulles elementus virs galvenajām rūtiņām, pārveidojot $\widetilde{\mathbf{L}}$ Ermita formā $\mathbf{L}_E$.■

1.2. piezīme. $\forall$ REP P var realizēt ar matricu reizināšanas palīdzību $\Longrightarrow$ $\forall$ matricai $\mathbf{A}$ $\exists$ elementāras matricas $\mathbf{P}_1, ..., \mathbf{P}_k$:

$$\mathbf{P}_k \cdot ... \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A} \text{ ir Ermita formā.}$$

1.2.2. Algoritms

Tāds pats kā Gausa metodē.

Gausa-Ermita metodē galvenos nezināmos ir vieglāk izteikt kā funkcijas no brīvajiem nezināmajiem.

1.7. piemērs. Atrisināsim ar Gausa-Ermita metodi LVS

$$\begin{cases} X_1 & -X_2 & -2X_3 & -4X_4 & -3X_5 & = -1 \\ X_1 & -X_2 & & +2X_4 & -X_5 & = 1 \\ 2X_1 & -2X_2 & -3X_3 & -5X_4 & -7X_5 & = -5. \end{cases}$$

Ar REP $R_{13}(-2)$, $R_{12}(-1)$, $R_2(1/2)$, $R_{23}(-1)$, $R_3(-1/2)$, $R_{21}(2)$, $R_{31}(1)$, $R_{32}(-1)$ paplašināto matricu var pārveidot Ermita formā

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

kas atbilst LVS

$$\begin{cases} X_1 & -X_2 & & +2X_4 & & = 3 \\ & & X_3 & +3X_4 & & = -1 \\ & & & & X_5 & = 2. \end{cases}$$

Risinot šo LVS sākot no pēdējā vienādojuma, iegūsim

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 + X_2 - 2X_4 \\ X_2 \\ -1 - 3X_4 \\ X_4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1.4. teorēma.
Ar Gausa-Ermita metodi tiek atrasti visi LVS atrisinājumi.

PIERĀDĪJUMS. Tāds pats kā Gausa metodē. ■

1.3. LVS atrisinājumu īpašības

1.5. teorēma.

1. LVS ir saderīga $\iff$ normalizētā pakāpienveida forma nesatur vienādojumu $0 = 1$ (paplašinātajā matricā pēdējā kolonna nesatur galveno rūtiņu).

2. LVS ir saderīga $\Longrightarrow$ brīvajiem nezināmajiem var tikt piešķirtas patvaļīgas vērtības.
3. $\Big($ LVS ir saderīga $\Big)$ $\Longrightarrow$ $\Big($ LVS $\exists$ viens atrisinājums $\Longleftrightarrow$ galveno nezināmo skaits ir vienāds ar vienādojumu skaitu $\Big)$.
4. Homogēnai LVS $\exists$ netriviāls atrisinājums $\Longleftrightarrow$ galveno nezināmo skaits ir mazāks nekā nezināmo skaits.
5. $m < n$ $\Longrightarrow$ homogēnai LVS $\exists$ netriviāls atrisinājums.

PIERĀDĪJUMS.
1. LVS satur vienādojumu $0 = 1$ $\Longrightarrow$ LVS ir nesaderīga.

Normalizētajā pakāpienveida formā LVS nesatur vienādojumu $0 = 1$ $\Longrightarrow$ galvenos nezināmos var izteikt kā funkcijas no brīvajiem nezināmajiem un brīvajiem nezināmajiem var piešķirt patvaļīgas vērtības.

2. Brīvos nezināmos nesaista nekādi nosacījumi. LVS būs apmierināta, ja to vērtības būs patvaļīgas.

3. Ja LVS ir tikai viens atrisinājums, tad nav brīvo nezināmo un vienādojumu skaits ir vienāds as nezināmo skaitu - $m = n$.

Ja nav neviena brīvā nezināmā, tad visi galvenie nezināmie ir viennozīmīgi noteikti.

4. Homogēna LVS vienmēr ir saderīga - eksistē triviālais atrisinājums

$$\begin{bmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Homogēnai LVS $\exists$ netriviāls atrisinājums $\iff$ $\exists$ vismaz viens brīvais nezināmais $\iff$ galveno nezināmo skaits ir mazāks nekā nezināmo skaits.

5. $m < n \implies \exists$ vismaz viens brīvais nezināmais. ■

2. 4.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

4.1 Pārveidot matricas normalizētā pakāpienveida formā.

(a) $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & -1 \\ \hline 3 & 4 & -9 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$

4.2 Atrisināt LVS ar Gausa metodi.

(a) $\left\{\begin{array}{cccc} X_1 & +3X_2 & +X_3 & =2 \\ X_1 & +6X_2 & +X_3 & =-1 \\ 4X_1 & +7X_2 & +2X_3 & =1 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{cccc} 3X_1 & +6X_2 & -3X_3 & =12 \\ 2X_1 & +4X_2 & -4X_3 & =0 \\ X_1 & +2X_2 & +X_3 & =12 \end{array}\right.$

(c) $\begin{cases} 3X_1 & +18X_2 & +6X_3 & = 0 \\ X_1 & +6X_2 & +4X_3 & = -6 \\ 2X_1 & +12X_2 & +3X_3 & = 0 \end{cases}$

4.3 Pārveidot matricas Ermita formā.

(a) $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & -3 \\ \hline 4 & -4 & 3 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$

4.4 Atrisināt LVS ar Gausa-Ermita metodi.

(a) $\begin{cases} X_1 & -3X_2 & -X_3 & +X_4 & = -5 \\ 3X_1 & -9X_2 & & +9X_4 & = 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2X_1 & +X_2 & & & = 1 \\ X_1 & +2X_2 & +X_3 & & = 1 \\ & X_2 & +2X_3 & +X_4 & = 1 \\ & & X_3 & +2X_4 & = 1 \end{cases}$

4.5 Atrisināt LVS ar parametriem, izpētīt atrisinājumu kopu atkarību no parametriem.

(a) $\begin{cases} X_1 & +2X_2 & = 3 \\ 2X_1 & +4X_2 & = \alpha. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} X_1 & -X_2 & +\alpha X_3 & = 0 \\ X_1 & -\beta X_2 & +2\gamma X_3 & = 0. \end{cases}$

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

4.6 Pārveidot Ermita formā.

(a) $\mathbf{A} = [a^{i+j}]_{n,n}$, $a \in \mathbb{R}$.

(b) $\mathbf{A} = \mathbf{R}_{n-1,n} \ldots \mathbf{R}_{34}\mathbf{R}_{23}\mathbf{R}_{12}$.