DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

3.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt lineāro vienādojumu sistēmu (LVS) pamatfaktus,
- apgūt LVS vienkāršošanas pārveidojumus - *elementāros pārveidojumus*,
- apgūt matricu algebras pielietošanu LVS vienkāršošanā.

Lekcijas kopsavilkums:

- LVS var uzdot vairākos veidos,
- var definēt trīs veidu pārveidojumus, kas maina LVS datus, nemainot to atrisinājumu kopas,

- LVS elementāros pārveidojumus var uzdot ar matricu reizināšanas palīdzību.

Svarīgākie jēdzieni: lineārs vienādojums, LVS, LVS vispārīgais, matricu un kolonnu pieraksti, LVS atrisinājumu kopa, LVS elementārie pārveidojumi, LVS elementāro pārveidojumu matricas.

Svarīgākie fakti un metodes: elementāro pārveidojumu īpašības un to realizācija ar matricu reizināšanu, elementāro pārveidojumu invertēšana, elementāro pārveidojumu virkņu īpašības.

1. Lineāru vienādojumu sistēmas

1.1. Ievads

1.1.1. Definīcijas un apzīmējumi

k - lauks (piemēram, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_2$). Par *lineāru vienādojumu* attiecībā uz *nezināmajiem* $X_1, X_2, ..., X_n$ laukā k sauc vienādojumu

$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n + a_0 = 0$$

vai

$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n = b, \text{ kur } a_1, ..., a_n, a_0, b \in k.$$

$\exists\ a_p \neq 0 \implies$

$$X_p = \frac{1}{a_p}\Big(b - a_1X_1 - ... - a_{p-1}X_{p-1} - a_{p+1}X_{p+1} - ... - a_nX_n\Big).$$

Nezināmo $X_1, ..., X_{p-1}, X_{p+1}, ..., X_n$ vērtības var izvēlēties patvaļīgi.

Vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a_{11}X_1 & +a_{12}X_2 & +\ldots & +a_{1n}X_n & = b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}X_1 & +a_{m2}X_2 & +\ldots & +a_{mn}X_n & = b_m \end{cases}$$

sauc par *lineāru vienādojumu sistēmu (LVS).*

1.1. piemērs. $\begin{cases} X_1+ & X_2+ & X_3 & = 0 \\ X_1+ & 2X_2 & & = 3 \\ & -X_2+ & 4X_3 & = 2 \end{cases}$

1.2. LVS pieraksta veidi

1.2.1. LVS vispārīgais pieraksts

Par LVS *vispārīgo pierakstu* sauc sistēmu

$$\begin{cases} a_{11}X_1 & +a_{12}X_2 & +\ldots & +a_{1n}X_n & = b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}X_1 & +a_{m2}X_2 & +\ldots & +a_{mn}X_n & = b_m, \end{cases}$$

kur

- X_j - *nezināmie,*
- a_{ij} - *koeficienti,*
- b_i - *brīvie locekļi.*

Ja $b_i = 0, \; \forall\, i$, tad LVS sauc par *homogēnu LVS.*

Ja $n = m$, tad LVS sauc par *kvadrātveida LVS.*

Ja nezināmo skaits ir neliels (ne vairāk kā 5), tad tos var apzīmēt ar burtiem bez indeksiem - X,Y,Z u.c., kurus matemātikā tradicionāli izmanto nezināmo lielumu apzīmēšanai.

1.2.2. LVS matricu pieraksts

$\forall$ LVS sistēmai

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11}X_1 & +a_{12}X_2 & +... & +a_{1n}X_n & = b_1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}X_1 & +a_{m2}X_2 & +... & +a_{mn}X_n & = b_m \end{array} \right.$$

definēsim 3 matricas:

- *sistēmas matrica* ir $m \times n$ matrica: $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \hline ... & ... & ... \\ \hline a_{m1} & ... & a_{mn} \end{array}\right]$,
- *nezināmo kolonnas matrica* $\mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} X_1 \\ \hline ... \\ \hline X_n \end{array}\right]$,
- *brīvo locekļu kolonnas matrica* $\mathbf{b} = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline ... \\ \hline b_n \end{array}\right]$.

LVS ir līdzvērtīga *LVS matricu vienādojumam*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

1.2.3. LVS paplašinātās matricas pieraksts

LVS L

$$\left\{\begin{array}{llllll} a_{11}X_1 & +a_{12}X_2 & +... & +a_{1n}X_n & =b_1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}X_1 & +a_{m2}X_2 & +... & +a_{mn}X_n & =b_m \end{array}\right.$$

paplašinātā matrica $\mathbf{L}$ ir $m \times (n+1)$ matrica

$$\mathbf{L} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right] = [\mathbf{A}|\mathbf{b}].$$

Paplašinātās matricas pieraksts ir matricu pieraksta variants, kas dažās situācijās ir ērtāks.

1.2. piemērs. Sistēmai

$$\left\{\begin{array}{llll} X_1+ & X_2+ & X_3 & =0 \\ X_1+ & 2X_2 & & =3 \\ & -X_2+ & 4X_3 & =2 \end{array}\right.$$

atbilst paplašinātā matrica $\mathbf{L} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right]$.

1.2.4. LVS kolonnu pieraksts (kolonnu aina)

Par LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *kolonnu pierakstu* sauc matricu vienādību

$$X_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + X_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + X_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

1.3. piemērs. Sistēmai

$$\begin{cases} X_1 & +X_2 & +X_3 & = 0 \\ X_1 & +2X_2 & & = 3 \\ & -X_2 & +4X_3 & = -2 \end{cases}$$

atbilst kolonnu pieraksts

$$X_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + X_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + X_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

1.3. LVS atrisinājumi

Par LVS

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n = b_1 \\ ... \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mn}X_n = b_m \end{cases}$$

atrisinājumu sauksim skaitļu (lauka elementu) virkni $(x_1^0, ..., x_n^0)$ tādu, ka, ievietojot X_i vietā x_i^0, $\forall\, i$, katra sistēmas vienādojuma vietā iegūst skaitļu (lauka elementu) vienādību.

Ja S_i ir i-tā vienādojuma atrisinājumu kopa, tad LVS atrisinājumu kopa ir $S_1 \cap S_1 \cap ... \cap S_m$.

Atrisināt LVS nozīmē atrast tās *atrisinājumu kopu* - atrast visus atrisinājumus.

LVS - *saderīga*, ja tai eksistē vismaz viens atrisinājums - atrisinājumu kopa nav tukša.

1.4. piemērs. Homogēnai LVS vienmēr ir vismaz viens atrisinājums *triviālais atrisinājums* $(0, ..., 0)$.

Sistēmai $\begin{cases} X + Y = 1 \\ X - Y = 1 \end{cases}$ atrisinājumu kopa satur vienu skaitļu pāri $(1, 0)$.

Sistēmai $\begin{cases} X + Y = 1 \\ X + Y = 0 \end{cases}$ atrisinājumu kopa ir tukša - nekāds skaitļu pāris (x^0, y^0) neapmierina šo sistēmu.

Sistēmai $\begin{cases} X + Y = 1 \\ 2X + 2Y = 2 \end{cases}$ atrisinājumu kopa ir bezgalīga - visi skaitļu pāri formā $(c, 1 - c)$, kur $c \in \mathbb{R}$, apmierina šo sistēmu.

Divas LVS sauc par ekvivalentām, ja to atrisinājumu kopas ir vienādas (tās var būt arī tukšas).

1.5. piemērs. Sistēmas $\begin{cases} X + Y = 1 \\ X - Y = 1 \end{cases}$ un $\begin{cases} X + Y = 1 \\ 2X = 2 \end{cases}$ ir ekvivalenta - tām abām atrisinājumu kopa ir skaitļu pāris $(1, 0)$.

LVS pētīšanas pamatuzdevums - LVS risināšana.

Viena no LVS risināšanas metodēm - pārveidot doto LVS uz ērtāku ekvivalentu sistēmu, veicot vienkāršus soļus, piemēram, *nezināmo izslēgšanu*, kas nemaina atrisinājumu kopu.

2. LVS elementārie pārveidojumi

Aprakstīsim vairāku tipu LVS *elementāros pārveidojumus (EP)*, kas nemaina LVS atrisinājumu kopu.

LVS elementārajiem pārveidojumiem piekārtosim matricu *rindu elementāros pārveidojumus (REP)*.

2.1. 1.veida elementārie pārveidojumi

LVS *1.veida EP (REP1)* R_{pq} - p-tā un q-tā vienādojuma apmaiņa:

$$\begin{cases} ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \\ a_{q1}X_1 + ... + a_{qn}X_n = b_q \\ ... \end{cases} \to \begin{cases} ... \\ a_{q1}X_1 + ... + a_{qn}X_n = b_q \\ ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \end{cases}$$

Paplašinātās matricas pierakstā REP1 nozīmē pārveidojumu R_{pq}.

Par REP1 R_{pq} *elementāro matricu* sauc matricu, ko iegūst, pielietojot R_{pq} vienības matricai $\mathbf{E}_m$:

$$\mathbf{R}_{pq} = R_{pq}(\mathbf{E}_m) = \mathbf{E}_m - \mathbf{E}_{pp} - \mathbf{E}_{qq} + \mathbf{E}_{pq} + \mathbf{E}_{qp}.$$

2.1. piemērs. $\mathbf{R}_{12} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$

2.2. 2.veida elementārie pārveidojumi

LVS *2.veida EP (REP2)* $R_p(\lambda)$, $\lambda \neq 0$ - p-tā vienādojuma koeficientu reizināšana ar λ:

$$\left\{\begin{array}{l} \dots \\ a_{p1}X_1 + \dots + a_{pn}X_n = b_p \\ \dots \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dots \\ (\lambda a_{p1})X_1 + \dots + (\lambda a_{pn})X_n = \lambda b_p \\ \dots \end{array}\right.$$

Paplašinātajai matricai REP2 nozīmē $R_p(\lambda)$.

Par REP2 $R_p(\lambda)$ *elementāro matricu* sauksim matricu, ko iegūst, pielietojot $R_p(\lambda)$ vienības matricai $\mathbf{E}_m$:

$$\mathbf{R}_p(\lambda) = R_p(\lambda)(\mathbf{E}_m) = \mathbf{E}_m + (\lambda - 1)\mathbf{E}_{pp}.$$

2.2. piemērs. $\mathbf{R}_2(-3) = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$

2.3. 3.veida elementārie pārveidojumi

LVS *3.veida EP (REP3)* $R_{pq}(\lambda)$ - p-tā vienādojuma, reizināta ar λ, pieskaitīšana q-tajam vienādojumam:

$$\begin{cases} ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \\ a_{q1}X_1 + ... + a_{qn}X_n = b_q \\ ... \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \quad \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1}X_1 & +\ldots & +a_{pn}X_n & = b_p \\ \quad \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_{q1} + \lambda a_{p1})X_1 & +\ldots & +(a_{qn} + \lambda a_{pn})X_n & = b_q + \lambda b_p \\ \quad \ldots & & & \end{cases}$$

Paplašinātās matricas pierakstā REP3 nozīmē $R_{pq}(\lambda)$.

Par REP3 $R_{pq}(\lambda)$ *elementāro matricu* sauksim matricu, ko iegūst, pielietojot $R_{pq}(\lambda)$ vienības matricai $\mathbf{E}_m$:

$$\mathbf{R}_{pq}(\lambda) = \mathbf{E}_m + \lambda \mathbf{E}_{qp}.$$

2.3. piemērs. $\mathbf{R}_{12}(-3) = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$

2.4. Elementāro pārveidojumu īpašības un realizācija ar matricu reizināšanu

Atrisinājumu saglabāšana

2.1. teorēma. $\forall$ EP R saglabā LVS atrisinājumu kopu.

PIERĀDĪJUMS

1. REP1 - R_{pq} nemaina LVS atrisinājumu kopu, jo LVS vienādojumi nemainās. Mainās tikai to kārtība sistēmā.

2. REP2 - $R_p(\lambda)$ nemaina LVS atrisinājumu kopu, jo viens LVS vienādojums tiek reizināts ar $\lambda \neq 0$.

3. REP3 - Apskatīsim $R_{pq}(\lambda)$. Ja virkne $(x_1^0, ..., x_n^0)$ apmierina sistēmu

$$\begin{cases} ... & ... & ... & ... \\ a_{p1}X_1 & +... & +a_{pn}X_n & = b_p \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{q1}X_1 & +... & +a_{qn}X_n & = b_q \\ ... \end{cases}$$

tad saskaitot q-to vienādojumu ar p-to vienādojumu reizinātu ar λ iegūsim

$$(a_{q1}+\lambda a_{p1})x_1^0+...+(a_{qn}+\lambda a_{pn})x_n^0=b_q+\lambda b_p,$$

tātad $(x_1^0,...,x_n^0)$ apmierina arī sistēmu

$$\begin{cases} ... & ... & ... & ... \\ a_{p1}X_1 & +... & +a_{pn}X_n & =b_p \\ ... & ... & ... & ... \\ (a_{q1}+\lambda a_{p1})X_1 & +... & +(a_{qn}+\lambda a_{pn})X_n & =b_q+\lambda b_p \\ ... \end{cases}$$

Otrādi - ja virkne $(x_1^0,...,x_n^0)$ apmierina sistēmu

$$\begin{cases} ... & ... & ... & ... \\ a_{p1}X_1 & +... & +a_{pn}X_n & =b_p \\ ... & ... & ... & ... \\ (a_{q1}+\lambda a_{p1})X_1 & +... & +(a_{qn}+\lambda a_{pn})X_n & =b_q+\lambda b_p \\ ... \end{cases}$$

tad tā apmierina arī sistēmu, ko iegūst, veicot $R_{pq}(-\lambda)$ -

$$\begin{cases} ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \\ a_{q1}X_1 + ... + a_{qn}X_n = b_q \\ ... \end{cases} \quad \blacksquare$$

Realizācija ar matricu reizināšana

2.2. teorēma. EP R atbilst paplašināto matricu pārveidojumam

$$\mathbf{L} \to \mathbf{RL}.$$

PIERĀDĪJUMS Ar tiešu pārbaudi $\forall$ R pārliecināsimies, ka pārveidotās LVS paplašinātā matrica ir $\mathbf{RL}$. $\blacksquare$

2.5. Elementāro pārveidojumu virknes

2.3. teorēma. Ja LVS $\mathbf{L}_2$ ir iegūta no LVS $\mathbf{L}_1$ pielietojot galīgu EP virkni $P_1, ..., P_k$, tad

1. $\mathbf{L}_1$ un $\mathbf{L}_2$ ir ekvivalentas,
2. $\mathbf{L}_2 = \mathbf{P}_k \cdot ... \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{L}_1$.
3. Matrica $\mathbf{P}_k \cdot ... \cdot \mathbf{P}_1$ ir vienāda ar EP virknes $P_1, ..., P_k$ pielietošanu vienības matricai.

PIERĀDĪJUMS

1. $\forall$ EP saglabā LVS atrisinājumu kopu $\Longrightarrow$ veicot pēctecīgi vairākus EP, atrisinājumu kopa arī tiks saglabāta.

2. Katrs nākamais EP P_i tiek pielietots iepriekšējo pārveidojumu kompozīcijai $\mathbf{P}_{i-1} \cdot ... \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{L}_1$, tāpēc pēc tā pielietošanas tiks iegūta matrica

$$\mathbf{P}_i \cdot (\mathbf{P}_{i-1} \cdot ... \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{L}_1) = \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_{i-1} \cdot ... \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{L}_1.$$

Pieņemot $i = k$ iegūsim pierādāmo apgalvojumu.

3. $\mathbf{P}_k \cdot ... \cdot \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_k \cdot ... \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{E}$. ■

2.1. piezīme. Pārbaudīt, ka $\mathbf{P}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = [\mathbf{PA}|\mathbf{Pb}]$ $\Longrightarrow$ ja LVS ir uzdota matricu veidā $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, tad EP matricas reizina abās pusēs:

$$\Big(\mathbf{Ax} = \mathbf{b}\Big) \to \Big((\mathbf{PA})\mathbf{x} = \mathbf{Pb}\Big).$$

2.6. Elementāro pārveidojumu invertējamība

2.6.1. Elementārie pārveidojumi kā funkcijas

Funkcija vai pārveidojums g ir inverss attiecībā uz f, ja

$$g(f(x)) = f(g(x)) = x.$$

Apzīmējums: $g = f^{-1}$.

2.4. teorēma. $\forall\, R$ ir invertējami (kā LVS vai to paplašināto matricu pārveidojumi):

$$\begin{cases} R_{pq}^{-1} = R_{pq} \\ R_p(\lambda)^{-1} = R_p(\lambda^{-1}) \\ R_{pq}(\lambda)^{-1} = R_{pq}(-\lambda). \end{cases}$$

PIERĀDĪJUMS Pielietojot R_{pq} divas reizes, iegūsim sākotnējo LVS $\Longrightarrow$ $\boxed{R_{pq}^{-1} = R_{pq}.}$

Pielietojot EP virkni $R_p(\lambda) \to R_p(\lambda^{-1})$ iegūsim sākotnējo LVS $\Longrightarrow$ $\boxed{R_p(\lambda)^{-1} = R_p(\lambda^{-1}).}$

Pielietojot EP virkni $R_{pq}(\lambda) \to R_{pq}(-\lambda)$ iegūsim sākotnējo LVS $\Longrightarrow$ $\boxed{R_{pq}(\lambda)^{-1} = R_{pq}(-\lambda).}$ ■

3. 3.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

3.1 Aprakstiet LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ja tās sistēmas matrica $\mathbf{A}$ ir

(a) rindas matrica,
(b) kolonnas matrica,
(c) kvadrātveida matrica,
(d) nulles matrica,
(e) vienības matrica,
(f) diagonāla matrica,
(g) augšēji trijstūrveida matrica.

3.2 Dotajām LVS un elementāro pārveidojumu virknēm atrast pārveidoto paplašināto matricu, pārveidoto sistēmu un pārveidojuma matricu.

(a) LVS:

$$\begin{cases} X_1 & +2X_2 & -2X_3 & -7X_4 & = -8 \\ 3X_1 & +6X_2 & -4X_3 & -11X_4 & = -12 \\ -2X_1 & -4X_2 & +3X_3 & +9X_4 & = 13. \end{cases}$$

EP virkne: $R_{12}(-3)$, $R_{13}(2)$, $R_2(1/2)$, $R_{23}(1)$ (sākot no kreisās puses).

(b) LVS:

$$\begin{cases} X_1 & +2X_2 & & -5X_4 & = 3 \\ 2X_1 & +4X_2 & -3X_3 & -16X_4 & = -6 \\ 3X_1 & +4X_2 & -2X_3 & -13X_4 & = -3. \end{cases}$$

EP virkne: $R_{12}(-2)$, $R_{13}(-3)$, R_{23}, $R_2(-1/2)$, $R_3(-1/3)$.

3.3 Aprakstīt LVS rindu pārveidojumus, kas atbilst paplašinātās matricas reizināšanai no kreisās puses ar dotajām matricām.

(a) $\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & c & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & d \\ \hline a & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & b & 0 & 0 \end{array}\right]$

3.4 Izmantojot elementāros pārveidojumus pārveidot LVS

$$\begin{cases} 2X_1 & -X_2 & +X_3 = & 3 \\ & 3X_2 & +4X_3 = & -1 \\ X_1 & +X_2 & -5X_3 = & 0 \end{cases}$$

par LVS, kuras sistēmas matrica ir

(a) augšēji trijstūrveida matrica,

(b) vienības matrica.

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

3.5 Vairāku vienādojumu lineāru kombināciju sauc par *seku vienādojumu.* Seku vienādojums ir vairāku REP2 un REP3 rezultāts. Pierādīt, ka LVS var pievienot jebkuru seku vienādojumu neizmainot atrisinājumu kopu. Realizēt seku vienādojumu pievienošanu izmantojot matricu reizināšanu.