DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

2.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

1. Ievads matricu algebrā **4**

1.1. Pamatfakti . . . 4

1.1.1. Definīcijas un apzīmējumi . . . 4

1.1.2. Speciāla veida matricas . . . 6

1.2. Matricu operācijas . . . 10

1.2.1. Rindu un kolonnu operācijas . . . 10

1.2.2. Matricu savienošana . . . 13

1.2.3. Transponēšana . . . 13

1.2.4. Lineārās operācijas . . . 14

1.2.5. Matricu reizināšana . . . 19

2. 2.mājasdarbs **27**

2.1. Obligātie uzdevumi . . . 27

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi 28

Lekcijas mērķis:

- apgūt matricu algebras pamatus.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt tabulas - matricas un to speciālgadījumus,
- matricu kopās var definēt vairākas operācijas, kas vispārina skaitļu aritmētiskās operācijas.

Svarīgākie jēdzieni: matrica, matricas elements, rinda, kolonna, galvenā diagonāle, rindas/kolonnas matrica, kvadrātveida matrica, nulles matrica, bāzes matrica, vienības matrica, diagonāla matrica, trijstūrveida matrica, bloku matrica, rindu/kolonnu izsvītrošana, rindu/kolonnu mainīšana vietām, rindas/kolonnas reizināšana ar skaitli, rindas/kolonnas pieskaitīšana citai rindai/kolonnai, transponēšana, matricu summa, matricas reizināšana ar skaitli, matricu lineāra kombinācija, matricu reizināšana, invertējama matrica.

Svarīgākie fakti un metodes: matricu operāciju īpašības.

1. Ievads matricu algebrā

1.1. Pamatfakti

1.1.1. Definīcijas un apzīmējumi

Matrica - galīga taisnstūrveida tabula, kuras rūtiņās ir ierakstīti skaitļi vai citu gredzenu elementi - *matricas elementi.*

1.1. piemērs. $$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 2 & 1 & 0 & a \\ \hline -3 & b & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & c \end{array}\right].$$

Matricas elementi, kas atrodas vienā rindā vai kolonnā (ailē)- *matricas rinda* vai *kolonnna.*

Divas matricas sauksim par vienādām, ja tām

1. sakrīt rindu un kolonnu skaits,
2. katrā rūtiņā matricu elementi ir vienādi.

Matrica ar m rindām un n kolonnām - $m \times n$ matrica.

Matricu rindas, kolonnas un elementus indeksē (piešķir adreses) sākot no augšējā kreisā stūra.

Vispārīga $m \times n$ matrica tiek apzīmēta šādi:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{array} \right] = [a_{ij}]_{m,n}.$$

Elements a_{ij} atrodas i-tajā rindā un j-tajā kolonnā.

Visu $m \times n$ matricu kopu, kuru elementi pieder R - $\mathcal{M}at(m, n, R)$.

Matricu var uzskatīt arī par tās rindu vai kolonnu apvienojumu:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{array}\right].$$

Matricas *galvenā diagonāle* - diagonāle, kas sākas ar matricas augšējo kreiso stūri. Tādējādi matricas $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ galvenā diagonāle ir elementu kopa $\{a_{11}, a_{22}, ..., a_{ii}, ...\}$.

1.1.2. Speciāla veida matricas

Rindas matrica - $1 \times n$ matrica.

1.2. piemērs. $\left[\begin{array}{c|c|c|c} 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right]$.

Kolonnas matrica, vektors - $m \times 1$ matrica.

1.3. piemērs. $\left[\begin{array}{c} 6 \\ \hline -3 \\ \hline 0 \end{array}\right]$.

Jebkurš skaitlis var tikt uzskatīts par 1×1 matricu.

Kvadrātveida matrica - $n \times n$ matrica, n - matricas *izmērs.*

Nulles matrica $\mathbf{0}$ vai $\mathbf{O}_{m,n} = [0]_{m,n}$.

Bāzes matrica $\boldsymbol{E}_{ij}$ - matrica, kuras visi elementi, izņemot elementu ar koordinātēm (i, j), ir vienādi ar 0 un elements ar koordinātēm (i, j) ir vienāds ar 1. Tādējādi $m \times n$ bāzes matricu skaits ir mn.

1.4. piemērs. $\mathbf{E}_{12} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$.

Vienības matrica $\boldsymbol{E}_n$ - $n \times n$ matrica, kuras elementi uz galvenās diagonāles ir vienādi ar 1 un visi pārējie elementi ir vienādi ar 0:

$$\mathbf{E}_n = [\delta_{ij}]_{n,n}, \text{ kur } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ja } i = j, \\ 0, & \text{ja } i \neq j. \end{cases}$$

1.5. piemērs. $\mathbf{E}_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right], \mathbf{E}_1 = \left[\begin{array}{c} 1 \end{array}\right].$

Diagonāla matrica - kvadrātveida matrica, kuras elementi ārpus galvenās diagonāles ir vienādi ar 0.

1.6. piemērs. $\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 \end{array}\right].$

Augšēji (apakšēji) trijstūrveida matricu - matrica, kuras visi elementi zem (virs) galvenās diagonāles ir vienādi ar 0.

1.7. piemērs. Augšēji trijstūrveida matrica - $\left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 4 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right].$

Nereti ir lietderīgi ar horizontālām un vertikālām atdalošām līnijām sadalīt matricu apakšmatricās - *blokos* un uzskatīt matricu par *bloku matricu*:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array}\right].$$

Speciālgadījums - matricas rindu un kolonnu reprezentācija:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \hline ... \\ \hline \mathbf{r}_m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{k}_1 & ... & \mathbf{k}_n \end{array}\right].$$

1.2. Matricu operācijas

1.2.1. Rindu un kolonnu operācijas

Rindu un kolonnu izsvītrošana.

1.8. piemērs. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$. Izsvītrojam 1.rindu un 2.kolonnu - $\left[\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 3 & 2 \end{array}\right]$.

Rindu (kolonnu) mainīšana vietām.

Dota matrica $\mathbf{A}$, divi indeksi p, q. $R_{pq}(\mathbf{A})$ $(K_{pq}(\mathbf{A}))$ - matrica, ko iegūst, apmainot vietām dotās rindas (kolonnas).

1.9. piemērs. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$, $R_{12}(\mathbf{A}) = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$.

Rindas (kolonnas) elementu reizināšana ar fiksētu skaitli.

Dota matrica $\mathbf{A}$, indekss p un skaitlis λ. $R_p(\lambda)(\mathbf{A})$ $(K_p(\lambda)(\mathbf{A}))$ - matrica, ko iegūst, reizinot $\mathbf{A}$ p-to rindu (kolonnu) ar λ.

1.10. piemērs. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$, $R_1(-2)(\mathbf{A}) = \left[\begin{array}{c|c|c} -2 & -6 & -2 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$.

Rindai (kolonnai) pieskaitīt citu rindu (kolonnu) reizinātu ar kādu ska

Rindas - Dota matrica $\mathbf{A}$, divi dažādi indeksi p, q un skaitlis λ. $R_{pq}(\lambda)(\mathbf{A})$ - matrica, ko iegūst no $\mathbf{A}$, pieskaitot rindai ar indeksu q rindu ar indeksu p, reizinātu ar λ.

1.11. piemērs. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$,

$$R_{2,1}(-2)(\mathbf{A}) = \left[\begin{array}{c|c|c} 1+(-2)\cdot 2 & 3+(-2)\cdot(-1) & 1+(-2)\cdot 0 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} -3 & 5 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

Kolonnas - Dota matrica $\mathbf{A}$, divi dažādi indeksi p, q un skaitlis λ. $K_{p,q}(\lambda)(\mathbf{A})$ - matrica, ko iegūst no $\mathbf{A}$, pieskaitot kolonnai ar indeksu q kolonnu ar indeksu p, reizinātu ar λ.

1.12. piemērs. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$,

$$K_{2,1}(-2)(\mathbf{A}) = \left[\begin{array}{c|c|c} 1+(-2)\cdot 3 & 3 & 1 \\ \hline 2+(-2)\cdot(-1) & -1 & 0 \\ \hline 3+(-2)\cdot 3 & 3 & 2 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} -5 & 3 & 1 \\ \hline 4 & -1 & 0 \\ \hline -3 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

1.2.2. Matricu savienošana

Atbilstošu izmēru matricas var savienot bloku matricās.

1.13. piemērs. **A** - $m \times n$ matrica, **b** - $m \times 1$ matrica. Savienosim tās $m \times (n+1)$ matricā $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$.

1.2.3. Transponēšana

Par $m \times n$ matricas $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ *transponēto matricu* sauc $n \times m$ matricu $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]_{n,m}$.

1.14. piemērs. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} -2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & -1 \end{array}\right], \mathbf{A}^T = \left[\begin{array}{c|c} -2 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & -1 \end{array}\right].$

1.1. piezīme. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

1.2.4. Lineārās operācijas

Vienādu izmēru matricu kopā var definēt operācijas, kas ir līdzīgas (vispārina) skaitļu saskaitīšanu.

Matricu summa

Par divu vienāda izmēra matricu $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ un $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m,n}$ summu sauksim matricu

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m,n}.$$

Citiem vārdiem sakot, saskaitot divas vienāda izmēra matricas, tiek saskaitīti elementi, kuriem ir vienādas adreses:

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hline
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \hline
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c|c|c}
b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ \hline
b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \hline
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline
b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn}
\end{array}\right] =
$$

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c}
a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ \hline
a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ \hline
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline
a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots & a_{mn}+b_{mn}
\end{array}\right].
$$

Matricas reizināšana ar skaitli

Par matricas $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ reizinājumu ar skaitli λ sauksim matricu

$$\lambda\mathbf{A} = [\lambda a_{ij}]_{m,n}.$$

Citiem vārdiem sakot, reizinot matricu ar kādu skaitli, visi tās elementi tiek reizināti ar šo skaitli:

$$\lambda \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & ... & \lambda a_{1n} \\ \hline \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & \lambda a_{2n} \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & ... & \lambda a_{mn} \end{array}\right].$$

Matricu $(-1)\mathbf{A}$ parasti apzīmē ar $-\mathbf{A}$.

1.15. piemērs. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

$$3 \cdot \left[\begin{array}{c|c|c} 3 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \hline 4 & 4 & -2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 9 & -3 & 6 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ \hline 12 & 12 & -6 \end{array}\right].$$

Matricu lineāra kombinācija

Ja ir dotas vairākas vienāda izmēra matricas $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_l$ un skaitļi $\lambda_1, ..., \lambda_l$ (*koeficienti*), tad izteiksmi

$$\lambda_1 \mathbf{A}_1 + ... + \lambda_l \mathbf{A}_l = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \mathbf{A}_i$$

sauksim par doto matricu *lineāru kombināciju.*

Izlasīt 2.lekcijas papildmateriālu par summēšanas apzīmējumiem un īpašībām.

Lineāro kombināciju $1 \cdot \mathbf{A} + (-1) \cdot \mathbf{B}$ apzīmē ar $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ un sauc par *matricu starpību.*

1.16. piemērs. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} -2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & -1 \end{array}\right], \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 2 & 3 \\ \hline 1 & -1 & -1 \end{array}\right],$

$2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c|c} -4 & 8 & 11 \\ \hline 9 & 1 & -5 \end{array}\right].$

Katra matrica $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ ir viennozīmīgi izsakāma formā

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1,j=1}^{m,n} a_{ij}\mathbf{E}_{ij}.$$

1.1. teorēma.

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ (komutativitāte).
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ (asociativitāte).
3. $\exists$ viennozīmīgi noteikta matrica $\mathbf{Z}:\forall\ \mathbf{A}\ ,\ \mathbf{A}+\mathbf{Z}=\mathbf{A}$.
4. $\forall\ \mathbf{A}\ \exists$ viennozīmīgi noteikta matrica $\mathbf{A}':\mathbf{A}+\mathbf{A}'=\mathbf{O}$.
5. $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$.
6. $(\lambda+\mu)\mathbf{A}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$.
7. $(\lambda\mu)\mathbf{A}=\lambda(\mu\mathbf{A})$.
8. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$.
9. $(\lambda\mathbf{A})^T=\lambda\mathbf{A}^T$.

PIERĀDĪJUMS (Patstāvīgi)
1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=[a_{ij}+b_{ij}]=[b_{ij}+a_{ij}]=\mathbf{B}+\mathbf{A}$.

2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=[(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]=[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$.

3. $\mathbf{Z} = \mathbf{O}$.

4. $\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$.

5. $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = [\lambda(a_{ij} + b_{ij})] = [\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}] = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$.

6. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = [(\lambda + \mu)a_{ij}] = [\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}] = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$.

7. $(\lambda\mu)\mathbf{A} = [(\lambda\mu)a_{ij}] = [\lambda(\mu a_{ij})] = \lambda(\mu\mathbf{A})$.

8. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = [a_{ji} + b_{ji}] = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

9. $(\lambda\mathbf{A})^T = [\lambda a_{ji}] = \lambda\mathbf{A}^T$. ■

1.2.5. Matricu reizināšana

Matricu kopā var definēt *matricu reizināšanu*, kas vispārina skaitļu reizināšanu.

Rindas un kolonnas reizināšana

Par rindas $[a_1|...|a_n]$ reizinājumu ar kolonnu $\left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline ... \\ \hline b_n \end{array}\right]$ sauc lauka elementu $a_1b_1 + ... + a_nb_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i$.

1.17. piemērs. $[2|3|-1] \cdot \left[\begin{array}{c} 4 \\ \hline 1 \\ \hline -3 \end{array}\right] = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) = 14.$

Vispārīgais gadījums

Par $m \times n$ matricas $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ reizinājumu ar $n \times r$ matricu $B = [b_{ij}]_{n,r}$ sauksim $m \times r$ matricu $\mathbf{AB} = [x_{ij}]_{m,r}$, kur

$$x_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}.$$

(x_{ij} - $\mathbf{A}$ i-tās rindas reizinājums ar $\mathbf{B}$ j-to kolonnu).

Matricu reizinājums ir operācija, kas ir definēta tikai noteiktos gadījumos, atkarībā no matricu izmēriem.

1.2. piezīme. Ir iespējama matricu reizinājuma vizualizācija trīs matricu stūra veidā - reizinājums ir vidējā matrica, kuras elementi tiek iegūti kā reizinātāju rindu un kolonnu reizinājumi:

$$\begin{array}{cc}
 & \left[\begin{array}{cc|c|cc} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1r} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nr} \end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \hline a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{array}\right] & \left[\begin{array}{cc|c|cc} x_{11} & .. & x_{1j} & .. & x_{1r} \\ \dots & .. & .. & .. & \dots \\ \hline x_{i1} & .. & x_{ij} & .. & x_{ir} \\ \hline \dots & .. & \dots & .. & \dots \\ x_{m1} & .. & x_{mj} & .. & x_{mr} \end{array}\right]
\end{array}$$

1.18. piemērs. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 3 \end{array}\right]$, $\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} -2 & 3 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 3 \end{array}\right]$,

$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c|c} -3 & 8 \\ \hline -4 & 15 \end{array}\right].$$

Ja ir dota kvadrātveida matrica $\mathbf{A}$, tad definēsim

$$\mathbf{A}^p = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}}_{p \text{ reizes}} = \mathbf{A}^{p-1} \cdot \mathbf{A}.$$

Definēsim arī $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}_n$.

$n \times n$ matricu $\mathbf{A}$ sauc par *invertējamu*, ja $\exists$ $n \times n$ matrica $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n.$$

1.19. piemērs. $\mathbf{E}_n^{-1} = \mathbf{E}_n$, $\left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$,

$$\left[\begin{array}{c|c} 5 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 1/5 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 3 & 1 \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -3 & 1 \end{array}\right].$$

1.2. teorēma. Ja ir definēti visi reizinājumi, tad

1. $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$.
2. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ (kreisā distributivitāte).
3. $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA}+\mathbf{CA}$ (labā distributivitāte).
4. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (asociativitāte).
5. $\mathbf{A}^u\mathbf{A}^v = \mathbf{A}^{u+v}$, kur $\mathbf{A}$ - kvadrātveida matrica.
6. $(\mathbf{A}^u)^v = \mathbf{A}^{uv}$, kur $\mathbf{A}$ - kvadrātveida matrica.
7. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.
8. $\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}$.
9. $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$.
10. $\exists\ \mathbf{A},\mathbf{B}:\ \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

PIERĀDĪJUMS (Patstāvīgi)

1. $\lambda(\mathbf{AB}) = \left[\lambda\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}\right] = \underbrace{\left[\sum_{l=1}^{n}(\lambda a_{il})b_{lj}\right]}_{=(\lambda\mathbf{A})\mathbf{B}} = \underbrace{\left[\sum_{l=1}^{n} a_{il}(\lambda b_{lj})\right]}_{=\mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})}$.

2. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \left[\sum_{l=1}^{n} a_{il}(b_{lj}+c_{lj})\right] = \left[\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj} + \sum_{l=1}^{n} a_{il}c_{lj}\right] =$ $\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$

3. Līdzīgi 2.

4. !!!

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}, \mathbf{B} = [a_{ij}]_{n,r}, \mathbf{C} = [c_{ij}]_{r,s}.$$

$$\mathbf{AB} = \left[\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}\right]_{m,r},$$

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \left[\sum_{u=1}^{r}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lu}\right)c_{uj}\right]_{m,s} = \left[\sum_{u,l} a_{il}b_{lu}c_{uj}\right]_{m,s},$$

$$\mathbf{BC} = \left[\sum_{u=1}^{r} b_{iu}c_{uj}\right]_{n,s},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \Big[\sum_{l=1}^{n} a_{il}\Big(\sum_{u=1}^{r} b_{lu}c_{uj}\Big)\Big]_{m,s} = \Big[\sum_{u,l} a_{il}b_{lu}c_{uj}\Big]_{m,s}.$$

5. Seko no asociativitātes.

6. Seko no asociativitātes.

7. Apzīmēsim $\mathbf{A}^T = [a_{ji}] = [a^T_{ij}]$, $\mathbf{B}^T = [b_{ji}] = [b^T_{ij}]$.

$$(\mathbf{AB})^T = \Big[\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}\Big]^T = \Big[\sum_{l=1}^{n} a_{jl}b_{li}\Big] =$$

$$\Big[\sum_{l=1}^{n} b_{li}a_{jl}\Big] = \Big[\sum_{l=1}^{n} b^T_{il}a^T_{lj}\Big] = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T.$$

8. $\forall$ matricu reizinājuma elementam visi saskaitāmie ir 0.

9. $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n} \implies \mathbf{AE}_n = \left[\sum_{l=1}^{n} a_{il}\delta_{lj}\right] = \underbrace{[a_{ij}]}_{l=j}.$

$$\mathbf{E}_m\mathbf{A} = \left[\sum_{l=1}^{n} \delta_{il}a_{lj}\right] = \underbrace{[a_{ij}]}_{l=i}.$$

10. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, $\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right]$, $\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$,
$\mathbf{BA} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$. ■

2. 2.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

2.1 Atrodiet matricas $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3,4}$ elementus, ja $a_{ij} = (-1)^{i+j} - ij$.

2.2 Atrisiniet matricu vienādojumus vai vienādojumu sistēmas:

(a) $\mathbf{X} + \mathbf{A} = 3(\mathbf{X} - \mathbf{B})$, kur $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right]$, $\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 0 & 2 \end{array}\right]$

(b) $\begin{cases} \mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{X} - 3\mathbf{Y} = \mathbf{O}_{2,2}. \end{cases}$

2.3 Atrodiet matricu lineārās kombinācijas:

(a) $3 \cdot \left[\begin{array}{c|c} 3 & 2 \\ \hline 4 & -1 \end{array}\right] - 2 \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline -2 & 4 \end{array}\right]^T$;

(b) $\sum\limits_{i,j=1}^{3} (-1)^{i+j} \mathbf{E}_{ij}$ (3×3 matrica).

2.4 Atrodiet matricu reizinājumus:

(a) $\left[\begin{array}{c|c} 1 & b \\ \hline a & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} c & 1 \\ \hline 1 & d \end{array}\right]$,

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & a & b \\ \hline -a & 0 & c \\ \hline -b & -c & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 3 \\ \hline -1 & 0 & 4 \\ \hline -3 & -4 & 0 \end{array}\right]$,

(c) $\mathbf{AB}$ un $\mathbf{BA}$, kur $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

2.5 Atrodiet matricu pakāpes $\mathbf{A}^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

(a) $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 1 & a \end{array}\right]$,

(b) $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

2.6 Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz matricu $\mathbf{A} \in Mat(2, \mathbb{R})$, kuras apmierina matricu vienādojumu $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}_2$.