DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

11.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt pirmos LT bāzu pielietojumus lineārajā algebrā.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt svarīgu LT raksturlielumu - dimensiju;
- elementu koordinātu izmaiņas pārejot uz citu bāzi var tikt aprēķinātas izmantojot matricu reizināšanu;
- matricu rangus un matricu invertējamību var interpretēt LT dimensiju terminos.

Svarīgākie jēdzieni: LT dimensija, matricas fundamentālās apakštelpas - matricas rindu un kolonnu telpa, matricas nulltelpa un kreisā nulltelpa, bāzes atrisinājumi.

Svarīgākie fakti un metodes: teorēma par maksimālo lineāri neatkarīgu elementu skaitu, teorēma par bāzes elementu skaita invarianci, algoritmi elementu koordinātu aprēķināšanai pārejot uz citu bāzi, matricas rangu interpretācija, matricas invertējamības kritēriji.

1. Lineāras telpas bāzes īpašības un lietojumi

1.1. Lineāras telpas dimensija

1.1.1. Lineāri neatkarīgu kopu ğeneratoru skaits

1.1. teorēma. $L = \langle \mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_n \rangle$, $S \subseteq L$. Tad

$$\underline{S} \implies |S| \leq n.$$

PIERĀDĪJUMS

Pierādījums no pretējā (kontrapozitīvais pierādījums) : pierādīsim, ka $\Big(|S| > n\Big) \implies \overline{S}$.

Pieņemsim, ka $S = \{\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_m\}$, kur $m > n$. Izteiksim $\forall\ \mathbf{t}_i$ kā $\{\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_n\}$ elementu lineāru kombināciju:

$$\mathbf{t}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{l}_j.$$

Vai $\exists$ netriviāla lineāra kombinācija $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{t}_i = \mathbf{0}$?

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{t}_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{l}_j \Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i}_{\mu_j} \Big)\mathbf{l}_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \mathbf{l}_j.$$

Apskatīsim sistēmu

$$\begin{cases} \mu_1 = 0 \\ \dots \\ \mu_n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{i1}\lambda_i = 0 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{m} a_{in}\lambda_i = 0 \end{cases} \iff \mathbf{B}\lambda = \mathbf{0},$$

kur $\mathbf{B}$ ir $n \times m$ matrica.

$n < m \implies r(\mathbf{B}) \le n \implies \exists$ netriviāls atrisinājums

$$\lambda = \left[\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \hline \ldots \\ \hline \lambda_m \end{array}\right] \implies$$

$\exists$ netriviāla lineāra kombinācija $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{t}_i = \mathbf{0} \implies \overline{S}$. ■

1.2. teorēma. L - galīgi ģenerēta LT, $\exists$ L bāze $\mathcal{B}$: $|\mathcal{B}| = n$.

1. $\forall$ L bāze satur n elementus.
2. $\left\{\begin{array}{l} |S| = n \\ \underline{S} \end{array}\right. \implies S$ - L bāze.

PIERĀDĪJUMS

1. Pieņemsim, ka $\exists$ L bāze $\mathcal{C}$: $|\mathcal{C}| < n$. Tā ir pretruna ar iepriekšējo teorēmu, jo $L = \langle \mathcal{C} \rangle = \langle B \rangle$, bet $|\mathcal{B}| > |\mathcal{C}|$.

Tāpat iegūst pretrunu, ja pieņem, ka $\exists$ L bāze $\mathcal{D}$, kurai $|\mathcal{D}| > n$.

2. S ir maksimāla lineāri neatkarīga sistēma $\implies S$ - bāze. ■

1.1.2. Dimensijas definīcija

No iepriekšējās teorēmas seko, ka galīgi ğenerētas LT bāzes elementu skaits ir invariants attiecībā uz bāzes maiņu.

Galīgi ğenerētas LT L bāzes elementu skaitu sauc par L *dimensiju* $\dim(L)$.

Definēsim arī $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$.

1.1. piemērs. $\dim(k^n) = n$ - vektoru telpa, $\dim(\mathcal{M}at(m, n, k)) = mn$.

1.2. Bāzes maiņa

1.2.1. Elementa koordinātes attiecībā uz doto bāzi

L - LT, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ - L bāze. $\forall\ \mathbf{l} \in L$ ir viennozīmīgi izsakāms formā

$$\mathbf{l} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mathbf{e}_i.$$

Lauka elementus $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sauc par $\mathbf{l}$ *koordinātēm attiecībā uz* $\mathcal{B}$.

1.2.2. Divas bāzes

Risinot uzdevumus lineārajā algebrā parasti sāk strādāt kādā kanoniskā bāzē.

Uzdevuma risināšanas gaitā var būt nepieciešams pāriet uz citu bāzi, kura ir labāk piemērota konkrētajam uzdevumam. Ir jāprot izteikt elementus visās bāzēs.

L - LT, $\dim(L) = n$.

$$\begin{cases} \mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\} \\ \mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\} \end{cases} \text{ - divas } L \text{ bāzes.}$$

Katrā bāzē elementus sakārtosim - iegūsim *sakārtotas bāzes*.

Katras bāzes elementus var izteikt kā otras bāzes elementu lineāras kombinācijas:

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = s_{11}\mathbf{e}_1 + ... + s_{n1}\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} s_{i1}\mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}'_2 = \sum_{i=1}^{n} s_{i2}\mathbf{e}_i \\ ... \\ \mathbf{e}'_n = \sum_{i=1}^{n} s_{in}\mathbf{e}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = a_{11}\mathbf{e}'_1 + ... + a_{n1}\mathbf{e}'_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}\mathbf{e}'_i \\ \mathbf{e}_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i2}\mathbf{e}'_i \\ ... \\ \mathbf{e}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{in}\mathbf{e}'_i \end{cases}$$

1.2. piemērs. $L = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{\underbrace{(1,0)}_{=\mathbf{e}_1}, \underbrace{(0,1)}_{=\mathbf{e}_2}\}$, $\mathcal{B}' = \{\underbrace{2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}_{=\mathbf{e}'_1}, \underbrace{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}_{=\mathbf{e}_2}\}$.

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{cases}, \begin{cases} \mathbf{e}_1 = \frac{1}{3}\mathbf{e}'_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_2 = -\frac{1}{3}\mathbf{e}'_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}'_2 \end{cases}$$

1.2.3. Elementa koordinātes dažādās bāzēs

Kā mainās elementa koordinātes pārejot uz citu bāzi?

Vienā bāzē

$$\mathbf{l} = \sum_{j=1}^{n} l_j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} l_j \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \mathbf{e}'_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} l_j \Big) \mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^{n} l'_i \mathbf{e}'_i.$$

Otrā bāzē

$$\mathbf{l} = \sum_{j=1}^{n} l'_j \mathbf{e}'_j = \sum_{j=1}^{n} l'_j \Big(\sum_{i=1}^{n} s_{ij} \mathbf{e}_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} l'_j \Big) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} l_i \mathbf{e}_i.$$

Pāreja

Sakārtosim **l** koordinātes kolonnas matricas veidā:

$$\mathbf{l} \sim \mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ \hline \dots \\ \hline l_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{vai } \mathbf{l}' = \begin{bmatrix} l'_1 \\ \hline \dots \\ \hline l'_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Redzam, ka

$$\begin{cases} \mathbf{l}' = \mathbf{A}\mathbf{l} \\ \mathbf{l} = \mathbf{S}\mathbf{l}'. \end{cases}$$

1.3. piemērs. Skatīt iepriekšējo piemēru.

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline -1 & 1 \end{array}\right], \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 1/3 & -1/3 \\ \hline 1/3 & 2/3 \end{array}\right]. \mathbf{l} = \left[\begin{array}{c} 2 \\ \hline 3 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{l}' = \mathbf{A}\mathbf{l} = \left[\begin{array}{c|c} 1/3 & -1/3 \\ \hline 1/3 & 2/3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 2 \\ \hline 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -1/3 \\ \hline 8/3 \end{array}\right].$$

1.1. piezīme.

$$\begin{cases} \mathbf{l}' = \mathbf{A}\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{S} \cdot \mathbf{l}' = \mathbf{E}_n\mathbf{l}' \\ \mathbf{l} = \mathbf{S}\mathbf{l}' = \mathbf{S}\mathbf{A} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{E}_n\mathbf{l} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{E}_n \\ \mathbf{S}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n. \end{cases}$$

1.3. Lietojumi - matricas un lineāru vienādojumu sistēmas

1.3.1. Matricas rindu un kolonnu telpas

$$\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(m,n,k),\ \mathbf{A} = [\mathbf{k}_1|...|\mathbf{k}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \hline ... \\ \hline \mathbf{r}_m \end{bmatrix}.$$

Definēsim divas LT, kas ir saistītas ar $\mathbf{A}$:

- $\mathbf{A}$ *rindu telpu* $R(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_m \rangle \leq \mathcal{M}at(1,n,k)$,
- $\mathbf{A}$ *kolonnu telpu* $K(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_n \rangle \leq \mathcal{M}at(m,1,k)$.

1.3. teorēma. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(m,n,k)$.

1. REP nemaina $R(\mathbf{A})$.
2. KEP nemaina $K(\mathbf{A})$.

PIERĀDĪJUMS

1. $R(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_m \rangle$.

REP1 : $\mathbf{r}_i \longleftrightarrow \mathbf{r}_j$
$\langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_i, ..., \mathbf{r}_j, ..., \mathbf{r}_m \rangle = \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_j, ..., \mathbf{r}_i, ..., \mathbf{r}_m \rangle$.

REP2 : $\mathbf{r}_i \longrightarrow \lambda \mathbf{r}_i$.

$\mathbf{r}_i = \frac{1}{\lambda}(\lambda \mathbf{r}_i) \Longrightarrow \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_i, ..., \mathbf{r}_m \rangle = \langle \mathbf{r}_1, ..., \lambda \mathbf{r}_i, ..., \mathbf{r}_m \rangle$.

REP3 : $\mathbf{r}_j \longrightarrow \mathbf{r}_j + \lambda \mathbf{r}_i$.
$\mathbf{r}_j = (\mathbf{r}_j + \lambda \mathbf{r}_i) - (\lambda)\mathbf{r}_i \Longrightarrow \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_j, ..., \mathbf{r}_m \rangle = \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_j + \lambda \mathbf{r}_i, ..., \mathbf{r}_m \rangle$.

2. Pierāda līdzīgi. ■

1.3.2. Rindu un kolonnu telpu bāze, ranga interpretācija

1.4. teorēma. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(m, n, k)$, $\mathbf{A}_R$- $\mathbf{A}$ rindu pakāpienveida forma, $\mathbf{A}_K$- $\mathbf{A}$ kolonnu pakāpienveida forma,

1. $\mathbf{A}_R$ nenulles rindas veido $R(\mathbf{A})$ bāzi.
2. $\mathbf{A}_K$ nenulles kolonnas veido $K(\mathbf{A})$ bāzi.
3. $rr(\mathbf{A}) = \dim R(\mathbf{A})$.
4. $rk(\mathbf{A}) = \dim K(\mathbf{A})$.

PIERĀDĪJUMS
1. Pārveidosim $\mathbf{A}$ ar REP rindu pakāpienveida formā

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{r}'_1 \\ \hline \ldots \\ \hline \mathbf{r}'_l \\ \hline \mathbf{0} \\ \hline \ldots \end{bmatrix}, \text{ kur } \mathbf{r}'_i \text{ - nenulles rindas.}$$

$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}_R)$.

Pierādīsim, ka $\mathcal{B} = \{\mathbf{r}'_1, \ldots, \mathbf{r}'_l\}$ ir $R(\mathbf{A})$ bāze.

Veidotājsistēma

Saskaņā ar iepriekšējo teorēmu

$$R(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_m \rangle = \langle \mathbf{r}'_1, ..., \mathbf{r}'_l \rangle.$$

Lineārā neatkarība

Pieņemsim, ka $\exists$ lineāra kombinācija

$$\lambda_1 \mathbf{r}'_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2 + ... + \lambda_l \mathbf{r}'_l = \mathbf{0}.$$

Veicam šādu secinājumu virkni:

1. Rindai $\mathbf{r}'_1$ nuļļu skaits no kreisās malas ir stingri mazāks nekā $\mathbf{r}'_2, ..., \mathbf{r}'_l \implies \lambda_1 = 0.$
2. Rindai $\mathbf{r}'_2$ nuļļu skaits no kreisās malas ir stingri mazāks nekā $\mathbf{r}'_3, ..., \mathbf{r}'_l \implies \lambda_2 = 0.$
3. ...
4. Rindai $\mathbf{r}'_{l-1}$ nuļļu skaits no kreisās malas ir stingri mazāks nekā $\mathbf{r}'_l \implies \lambda_{l-1} = 0.$

5. $\lambda_l = 0$.

2. Pierāda līdzīgi, izmantojot KEP.
3.,4. - seko no 1.,2. ■

1.3.3. Matricas nulltelpas

$\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(m, n, k)$.

$\mathbf{A}$ *nulltelpa*

$$\mathcal{N}ull(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M}at(n, 1) \Big| \mathbf{A}\mathbf{x} = 0\}.$$

$\mathbf{A}$ *kreisā nulltelpa*

$$\mathcal{N}ull(\mathbf{A}^T) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{M}at(m, 1) \Big| \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}\}.$$

Par LVS $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *bāzes atrisinājumu* sauksim atrisinājumu, kuram vienam no brīvajiem nezināmajiem vērtība ir 1, bet pārējiem 0.

1.2. piezīme. $R(\mathbf{A})$, $K(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}ull(\mathbf{A}^T)$ sauc par $\mathbf{A}$ *fundamentālajām apakštelpām.*

2. 11.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

11.1 Noteikt LT L dimensiju.

(a) $L \leq \mathbb{R}^3$, $L = \{\mathbf{v} | \mathbf{v} = (x, y, 0), \forall\, x, y\}$;
(b) $L \leq \mathcal{M}at(m, n, \mathbb{R})$, L - augšēji trijstūrveida matricas;
(c) $L \leq \mathbb{R}[X]$, $L = \{f | \deg(f) \leq 10\}$.

11.2 Pārbaudiet, vai dotās kopas ir bāzes. Atrast abas pārejas matricas starp "bāzēm" $\mathcal{B}$ un $\mathcal{B}'$, ja tas ir iespējams.

(a) $L = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(0, 1), (-2, 0)\}$;
(b) $L = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$,
$\mathcal{B}' = \{(0, 1, 2), (2, 0, -1), (-1, 2, 4)\}$;
(c) $L = \mathcal{M}at(2, 2, \mathbb{R})$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{22}\}$,
$\mathcal{B}' = \{\mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{12} + \mathbf{E}_{22}, \mathbf{E}_{22} + \mathbf{E}_{21}, \mathbf{E}_{21} + \mathbf{E}_{11}\}$.

11.3 Atrast bāzes un dimensijas matricu četrām fundamentālajām apakštelpām.

(a) $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & -1 \\ \hline 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2 & -1 \\ \hline -1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right]$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

11.4 k - lauks.

(a) Pierādīt, ka katra k^n apakštelpa ir kādas homogēnas LVS atrisinājumu kopa.

(b) Klasificēt visas k^n apakštelpas - atrast veidu kā savstarpēji viennozīmīgi piekārtot katrai apakštelpai kādu labāk saprotamu matemātisku objektu, piemēram, matricu kādā noteiktā formā.