DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

10.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2013./2014.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt lineāro telpu bāzu teorijas pamatus.

Lekcijas kopsavilkums:

- LT var definēt svarīgu *lineārās neatkarības* jēdzienu,
- LT var apskatīt speciāla veida veidotājsistēmas - *bāzes*,
- var pierādīt vairākas svarīgas bāzu īpašības.

Svarīgākie jēdzieni: lineāra atkarība/neatkarība, LT bāze, kanoniskās bāzes, galīgi ģenerēta LT.

Svarīgākie fakti un metodes: lineāras atkarības īpašības, bāzes eksistence galīgi ģenerētā LT, bāzes īpašības.

1. Lineārā neatkarība, lineāras telpas bāze

1.1. Lineārā atkarība un neatkarība

1.1.1. Definīcija

Lineārā atkarība

LT L elementus $\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_n$ sauc par *lineāri atkarīgiem*, ja eksistē to netriviāla lineāra kombinācija, kas ir vienāda ar $\mathbf{0}$:

$$\exists\ \lambda_1, ..., \lambda_n, \exists\ \lambda_i \neq 0 :\ \lambda_1 \mathbf{l}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{l}_n = \mathbf{0}.$$

Lineārā neatkarība

LT L elementus $\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_n$ sauc par *lineāri neatkarīgiem*, ja tikai to triviāla lineāra kombinācija ir vienāda ar $\mathbf{0}$:

$$\lambda_1 \mathbf{l}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{l}_n = \mathbf{0} \implies \forall\ i\ \lambda_i = 0.$$

Faktu, ka X ir lineāri atkarīga (neatkarīga) kopa apzīmēsim ar $\overline{X}$ ($\underline{X}$).

1.1.2. Speciālgadījumi

1 elements

$S = \{\mathbf{l}\}$. $\underline{S} \iff \mathbf{l} \neq \mathbf{0}$.

2 elementi

$S = \{\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2\}$. $\underline{S} \iff \mathbf{l}_1 \neq \lambda \mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2 \neq \mathbf{0}$.

1.1.3. Pamatīpašības

1.1. teorēma. L - lineāra telpa.

1. $\overline{X} \iff \exists\, \mathbf{l} \in X : \mathbf{l} \in \langle X \backslash \{\mathbf{l}\} \rangle$ ($\mathbf{l}$ var izteikt kā pārējo X elementu lineāru kombināciju).
2. $\left\{ \begin{array}{l} \underline{X}, \\ Y \subseteq X \end{array} \right. \implies \underline{Y}$ (lineāri neatkarīgas kopas apakškopa ir lineāri neatkarīga).

PIERĀDĪJUMS

1. $\overline{X}$ $\Longleftrightarrow$ $\exists$ netriviāla lineāra kombinācija

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{l}_i = \mathbf{0}, \text{ kur } \lambda_j \neq 0 \Longrightarrow \lambda_j \mathbf{l}_j = - \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \lambda_i \mathbf{l}_i$$

$$\Longrightarrow \mathbf{l}_j = \left(-\frac{1}{\lambda_j}\right) \sum_{i=1, i\neq j} \lambda_i \mathbf{l}_i \Longrightarrow \mathbf{l}_j \in \langle X \backslash \{\mathbf{l}_i\} \rangle.$$

$$\exists\, j: \ \mathbf{l}_j \in \langle X \backslash \{\mathbf{l}_i\} \rangle \Longrightarrow \mathbf{l}_j = \sum_{i=1, i\neq j} \mu_i \mathbf{l}_i \Longrightarrow$$

$\exists$ netriviāla lineāra kombinācija

$$\mathbf{l}_j - \sum_{i=1, i\neq j} \mu_i \mathbf{l}_i = \mathbf{0} \Longrightarrow \overline{X}.$$

2. Pieņemsim pretējo:

$$\begin{cases} \underline{X} \\ \overline{Y} \subseteq X \\ \overline{Y} \end{cases} \quad {\color{red}\Longrightarrow} \quad \exists \text{ netriviāla lin.komb. } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{y}_i = \mathbf{0}.$$

Tā pati netriviālā lineārā kombinācija var tikt uzskatīta arī kā lineāra kombinācija ar X elementiem, jo $\mathbf{y}_i \in X$ - pretruna ar $\underline{X}$. ■

1.2. Lineāras telpas bāze

1.2.1. Definīcija

LT L apakškopu $\mathcal{B}$ sauc par L *bāzi*, ja

1. $\underline{\mathcal{B}}$ ($\mathcal{B}$ ir lineāri neatkarīga kopa),
2. $\langle \mathcal{B} \rangle = L$ ($\mathcal{B}$ ir L veidotājsistēma).

1.1. piezīme. LT bāze nav noteikta viennozīmīgi, ja neskaita atsevišķus gadījumus.

1.1. piemērs. $L = \mathbb{R}^2$ - plaknes vektori, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \hline 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 1 \end{bmatrix} \right\}$.

1.2.2. Kanoniskās bāzes

Aritmētiskā telpa k^n

Kanoniskā bāze $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, kur

$$\mathbf{e}_i = \underbrace{[0|...|1|...|0]^T}_{\text{1 i-tajā vietā}}:$$

- $\begin{bmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline ... \\ \hline x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i,$
- $\underline{\mathcal{B}}: \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \implies \forall\ i : \lambda_i = 0.$

Matricu telpa $\mathcal{M}at(m, n, k)$

Kanoniskā bāze $\mathcal{B} = \{\mathbf{E}_{11}, ..., \mathbf{E}_{mn}\}$:

- $\mathbf{A} = \sum\limits_{i,j=1}^{m,n} a_{ij}\mathbf{E}_{ij}$,
- $\underline{\mathcal{B}}$: $\sum\limits_{i,j=1}^{m,n} \lambda_{ij}\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{0} \implies \forall\ i, j : \lambda_{ij} = 0.$

Polinomu telpa $k[X]$

Kanoniskā bāze $\mathcal{B} = \{1, X, X^2 ...\}$, $|\mathcal{B}| = \infty$.

- $p(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} p_i X^i$,
- $\underline{\mathcal{B}}$: $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i X^i = \mathbf{0} \implies \forall\ i : \lambda_i = 0.$

Matricas A nulltelpa $\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$

Jebkuru bāzi sauc par *fundamentālo atrisinājumu kopu. Bāzes atrisinājumi* - tieši viens no brīvajiem nezināmajiem ir 1, pārējie - 0.

1.2.3. Bāzes eksistence

LT L sauc par *galīgi ģenerētu*, ja tai eksistē galīga veidotājsistēma.

1.2. piemērs. k^n, $\mathcal{M}at(m, n, k)$ - galīgi ģenerētas.
$k[X]$, $k^{\mathbb{N}}$ - nav galīgi ģenerētas.

1.2. teorēma. *L - galīgi ģenerēta LT.*

1. $\exists\ L$ bāze $\mathcal{B}$: $|\mathcal{B}| < \infty$.
2. $\left\{ \begin{array}{l} S \subseteq L \\ \underline{S} \end{array} \right. \implies \exists\ \mathcal{B} \subseteq L : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B} - L \text{ bāze} \\ S \subseteq \mathcal{B}. \end{array} \right.$ (jebkuru lineāri neatkarīgu kopu var papildināt līdz bāzei).

PIERĀDĪJUMS

1. Pieņemsim, ka $L = \langle \mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_n \rangle = \langle \mathcal{G} \rangle$.

Ja kopu $\mathcal{G}$ var samazināt uz kopu $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$ saglabājot veidotājsistēmas īpašību, tad to darīsim. Iegūsim, iespējams, mazāku kopu

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_m\} : \begin{cases} \langle \mathcal{B} \rangle = L \\ \mathcal{C} \subsetneq \mathcal{B} \Longrightarrow \langle C \rangle \neq L. \end{cases}$$

Pierādīsim, ka $\mathcal{B}$ ir lineāri neatkarīga.

Pieņemsim pretējo: $\exists$ netriviāla lineāra kombinācija

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0}.$$

Pieņemsim, ka $\lambda_j \neq 0 \Longrightarrow$

$$\mathbf{b}_j = -\frac{1}{\lambda_j} \sum_{i \neq j} \lambda_i \mathbf{b}_i \Longrightarrow \mathbf{b}_j \in \langle \mathcal{B} \backslash \mathbf{b}_j \rangle \Longrightarrow$$

$L = \langle \mathcal{B} \backslash \mathbf{b}_j \rangle$ - pretruna, jo $\mathcal{B}$ nevar samazināt saglabājot veidotājsistēmas īpašību.

2. Pieņemsim, ka

- $S = \{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$,
- $\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ ir L bāze, kas $\exists$ saskaņā ar pirmo apgalvojumu.

Apskatīsim elementu virkni

$$(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n).$$

Lasīsim šo virkni no kreisās puses un svītrosim visus elementus, kas izsakās kā iepriekšējo elementu lineāra kombinācija. $\underline{S} \Longrightarrow$ jāsvītro būs tikai $\mathcal{B}_0$ elementi.

Rezultātā iegūsim virkni $(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m, \mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_j})$.

Pierādīsim, ka kopa $\mathcal{B} = \{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m, \mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_j}\}$ ir bāze.

Lineārā neatkarība

Ja eksistētu netriviāla lineāra kombinācija

$$\lambda_1 \mathbf{f}_1 + ... + \lambda_m \mathbf{f}_m + \mu_1 \mathbf{e}_{i_1} + ... + \mu_j \mathbf{e}_{i_j} = 0,$$

tad $\mathbf{e}_l$ ar maksimālo indeksu, kuram $\mu_l \neq 0$ varētu izteikt kā iepriekšējo lineāru kombināciju - pretruna.

Veidotājsistēma

$\langle \mathcal{B}_0 \rangle = L$, $\forall$ izsvītrotais $\mathcal{B}_0$ elements izsakās kā neizsvītroto elementu lineāra kombinācija $\Longrightarrow$ $\forall\ \mathbf{x} \in L$ izsakās kā $\mathcal{B}$ elementu lineāra kombinācija $\Longrightarrow$ $\langle \mathcal{B} \rangle = L$. ■

1.2. piezīme. Ja L nav galīgi ģenerēta LT, tad bāze (bezgalīga) arī eksistē. Tas ir grūtāk pierādāms. Var apskatīt piemērus $k[X]$ un $k^{\mathbb{N}}$.

1.2.4. Bāzes īpašības

1.3. teorēma. L - LT, $\mathcal{B} \subseteq L$. Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.

1. $\mathcal{B}$ - L bāze.
2. $\forall\ \mathbf{l} \in L$ ir viennozīmīgi izsakāms kā $\mathcal{B}$ elementu lineāra kombinācija.

3. $\mathcal{B}$ ir maksimāla lineāri neatkarīga L apakškopa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathcal{B}} \\ \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{C} \end{array} \right. \implies \overline{\mathcal{C}}.$$

4. $\mathcal{B}$ ir minimāla L veidotājsistēma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \mathcal{B} \rangle = L \\ \mathcal{D} \subsetneq \mathcal{B} \end{array} \right. \implies \langle \mathcal{D} \rangle \lneq L.$$

PIERĀDĪJUMS

1. $\implies$ 2.

$\langle \mathcal{B} \rangle = L \implies \forall\, \mathbf{l} \in L$ ir izsakāms lineāras kombinācijas veidā:

$$\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{b}_i.$$

Pieņemsim, ka $\exists\, \mathbf{l}$, kurš var tikt izteikt divos veidos:

$$\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathbf{b}_i \implies$$

$$\mathbf{l} - \mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{b}_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) \mathbf{b}_i = \mathbf{0}.$$

$\underline{\mathcal{B}} \implies \lambda_i - \mu_i = 0, \forall\ i.$

$2. \implies 1.$

Uzreiz seko, ka $\langle \mathcal{B} \rangle = L$.

$\mathbf{0}$ var viennozīmīgi izteikt $\mathcal{B}$ elementu lineāras kombinācijas veidā ar 0 koeficientiem $\implies \underline{\mathcal{B}}$.

$2. \implies 3.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathcal{B}} \\ \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{C} \end{array} \right. \implies \exists\ c \in \mathcal{C} \backslash \mathcal{B} : \ c \in \langle \mathcal{B} \rangle \implies \overline{\mathcal{C}}.$$

$3. \implies 2.$

Jāpierāda, ka $\mathcal{B}$ ir veidotājsistēma.

Ja $\exists\, \mathbf{l} \in L$ tāds, ka $\mathbf{l} \notin \langle \mathcal{B} \rangle \implies \underline{\mathbf{l} \cup \mathcal{B}}$. Bet $\mathcal{B} \subsetneq (\mathbf{l} \cup \mathcal{B})$ - pretruna.

Jāpierāda, ka $\forall\, \mathbf{l}$ ir viennozīmīgi izsakāms kā $\mathcal{B}$ elementu lineāra kombinācija.

Pieņemsim, ka $\exists\, \mathbf{l}$, kurš var tikt izteikt divos veidos:

$$\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathbf{b}_i \implies$$

$$\mathbf{l} - \mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{b}_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) \mathbf{b}_i = \mathbf{0}.$$

$\underline{\mathcal{B}} \implies \lambda_i - \mu_i = 0, \forall\, i.$

1. $\implies$ 4.

Uzreiz seko, ka $\langle \mathcal{B} \rangle = L$.
$\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{B} \implies \exists\, \mathbf{b} \in \mathcal{B} \backslash \mathcal{D}$.

Ja $\mathbf{b}$ varētu izteikt kā $\mathcal{D}$ lineāru kombināciju $\mathbf{b} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{d}_i$, tad eksistētu netriviāla lineāra kombinācija

$$\mathbf{b} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{d}_i = \mathbf{0} \text{ - pretruna ar } \underline{\mathcal{B}}.$$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{b} \notin \langle \mathcal{D} \rangle$ $\Longrightarrow$ $\langle \mathcal{D} \rangle \lneq L$

4. $\Longrightarrow$ 1.

$\overline{\mathcal{B}}$ $\Longrightarrow$ $\exists\ \mathbf{b} \in \mathcal{B}:\ \mathbf{b} \in \langle \underbrace{\mathcal{B} \backslash \{\mathbf{b}\}}_{=\mathcal{F}} \rangle$ $\Longrightarrow$ $\langle \mathcal{F} \rangle = L$ - pretruna. ■

1.2.5. Elementa koordinātes attiecībā uz doto bāzi

L - LT, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ - L bāze. $\forall\ \mathbf{l} \in L$ ir viennozīmīgi izsakāms formā

$$\mathbf{l} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i.$$

Lauka elementus (skaitļus) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sauc par $\mathbf{l}$ *koordinātēm attiecībā uz* $\mathcal{B}$.

1.2.6. Elementa koordinātu kolonna

Sakārtosim $\mathbf{l}$ koordinātes kolonnas matricas - *koordinātu kolonnas* veidā:

$$\mathbf{l} \sim \mathbf{l} = \left[\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \hline ... \\ \hline \alpha_n \end{array}\right]_{\mathcal{B}}$$

Koordinātu kolonna ir atkarīga gan no elementa, gan no bāzes.

2. 10.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

10.1 Noteikt, vai dotās LT elementu kopas ir lineāri neatkarīgas.

(a) $L = \mathbb{R}^2$, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$;

(b) $L = \mathbb{R}^3$, $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$;

(c) $L = \mathbb{R}^4$, $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$.

10.2 Noteikt, vai $\mathcal{B}$ ir LT telpas L bāze.

(a) $L = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$;

(b) $L = \mathcal{M}at(2, 3, \mathbb{R})$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{13}, \mathbf{E}_{21}\}$;

(c) $L \leq \mathbb{R}[X]$, $L = \{f \,|\, \deg(f) \leq 2\}$, $\mathcal{B} = \{1, X-1, (X-1)^2\}$.

10.3 Papildināt kopu S līdz LT L bāzei un atrast elementa $\mathbf{u}$ koordinātes attiecībā uz šo bāzi.

(a) $L = \mathbb{R}^3$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \end{bmatrix}$;

(b) $L = \mathcal{M}at(2,2)$, $S = \{\mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{22}, \mathbf{E}_{12} + \mathbf{E}_{21}\}$, $\mathbf{u} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \end{array}\right]$;

(c) $L \leq \mathbb{R}[X]$, $L = \{f \,|\, \deg(f) \leq 2\}$, $S = \{2, X^2 + 2X + 2\}$, $\mathbf{u} = 3X^2 - 2X + 1$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

10.4 $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n, \mathbb{Q})$ sauc par

- *pusmağisku kvadrātu*, ja visu rindu un kolonnu elementu summas ir vienādas,

- *mağisku kvadrātu,* ja visu rindu, kolonnu un abu diagonāļu elementu summas ir vienādas.

(a) Pierādīt, ka abu veidu mağiskie kvadrāti veido lineāras apakštelpas LT $\mathcal{M}at(n, \mathbb{Q})$.

(b) Atrast galīgas veidotājsistēmas abu veidu mağisko kvadrātu LT gadījumos, kad $n \in \{2, 3, 4, ...\}$.

10.5 Atrodiet bāzes pusmağisko un mağisko kvadrātu telpās ar izmēriem $2, 3, 4$.

10.6 L - lineāra telpa, $\dim(L) = n$, $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n$ - L bāzes. Pierādīt, ka var izveidot matricu $\mathbf{B}$ ar šādām īpašībām:

- $\mathbf{B}$ i-tajā rindā ir visi bāzes $\mathcal{B}_i$ elementi (katras rindas elementi veido L bāzi),
- katras $\mathbf{B}$ kolonnas elementi veido L bāzi.

Piezīme. Gadījumus, ja $n \in \{2, 3\}$, atrisināt nav grūti. Patvaļīgam n dotā problēma vēl nav atrisināta (*G.C.Rota problēma*)