DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

1.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt kopu teorijas un skaitļu kopu pamatjēdzienus.

Lekcijas kopsavilkums:

- lietderīgi ir pētīt dažādas dabas objektu kopumus - kopas,
- var definēt dažādas kopu operācijas un pētīt to īpašības,
- var definēt un izmantot vairākas skaitļu kopas ar dabiskajām aritmētiskajām operācijām.

Svarīgākie jēdzieni: kopa, Eilera diagramma, kopu vienādība, apakškopa, papildinājums, apvienojums, šķēlums, starpība, naturālie skaitļi, veselie skaitļi, racionālie skaitļi, reālie skaitļi.

Svarīgākie fakti un metodes: apakškopu īpašības, kopu operāciju īpašības, kopu vienādības pierādīšanas metodes.

1. Kopu teorijas pamati

1.1. Pamatdefinīcijas

Kopa ir matemātikas pamatjēdziens, to definē aprakstoši.

Kopa ir jebkuras dabas dažādu objektu (kopas elementu) kopums, kas tiek uzskatīts par vienotu veselu.

Visi kopas elementi tiek uzskatīti par dažādiem.

Ja objekts a tiek uzskatīts par kopas A elementu, tad saka, ka a pieder kopai A vai, ka A satur elementu a ($a \in A$). Ja objekts a netiek uzskatīts par kopas A elementu, tad saka, ka a nepieder kopai A ($a \notin A$).

Kopu, kas nesatur nevienu elementu, sauc par *tukšu kopu* ($\varnothing$).

Ja kopa A satur galīgu skaitu elementu, tad to sauc par *galīgu* *kopu*, A elementu skaitu apzīmē ar $|A|$, pretējā gadījumā A sauc par *bezgalīgu kopu*.

1.1. piemērs. Kopu piemēri:

- visu naturālu skaitļu kopa,
- visu naturālu skaitļu kopa, kas ir mazāki nekā 10,
- visu alfabēta burtu kopa,
- visu plaknes punktu kopa.

1.2. Kopu uzdošanas veidi

1.2.1. Elementu pārskaitīšana

Kopas var uzdot aprakstot (pārskaitot) visus kopas elementus saraksta veidā (šī metode visbiežāk tiek izmantota, ja kopas elementu skaits ir mazs), šajā gadījumā kopas elementus apvieno ar figūriekavām; piemēram, pieraksts

$$A = \{a, b, c\}$$

uzdod kopu A, kas satur 3 elementus a, b, c.

Gadījumā, ja kopa ir bezgalīga, lieto šādu pierakstu:

$$A = \{a_i\}_{i \in I},$$

kur i ir *indekss*, ar kura starpniecību tiek pārskaitīti kopas elementi, un I ir šī indeksa vērtību kopa.

1.2.2. Definējošā īpašība vai algoritms

Kopas var uzdot aprakstot

- kopas elementus raksturojošo īpašību,
- algoritmisku procedūru.

Visbiežāk raksturojošo īpašību ieslēdz figūriekavās, kurās ir atdaloša vertikāla svītra:

- pa kreisi no šīs svītras tiek uzdots *universs* (aptverošā kopa),

- pa labi no atdalošās svītras tiek uzdota īpašība, kas piemīt uzdodamās kopas elementiem:

$$A = \{\text{universs}|\text{īpašība}\}.$$

1.2. piemērs. $A = \{n \in \mathbb{N}|n > 10\}$ - naturālo skaitļu kopas apakškopa, kas satur visus naturālus skaitļus, kas ir lielāki nekā 10.

1.2.3. Pārveidojumu rezultāts

Kopu var uzdot iegūstot to no iepriekš uzdotām kopām veicot ar tām noteiktus pārveidojumus (darbības, operācijas).

1.2.4. Kopu vizualizācija

Populāra kopu vizualizācijas metode - *Eilera (Eilera-Venna) diagrammas*. Kopas tiek attēlotas kā plaknes apgabali. Šī metode var tikt pielietota, ja kopu skaits nav pārāk liels (2-4 kopas) un speciālgadījumos.

1.3. Kopu vienādība, apakškopas

1.3.1. Kopu vienādība

Kopas A un B sauc par vienādām ($A = B$), ja izpildās šāds noteikums:

$$\Big(a \in A \implies a \in B\Big) \text{ un } \Big(b \in B \implies b \in A\Big).$$

Citiem vārdiem sakot, kopas A un B nav atšķiramas viena no otras kā elementu kopumi.

Tukša kopa nav vienāda ne ar kādu netukšu kopu.

1.3.2. Apakškopas

Kopa A ir kopas B *apakškopa* ($A \subseteq B$), ja izpildās šāds noteikums:

$$a \in A \implies a \in B.$$

Šādā gadījumā B ir A *aptveroša kopa*.

Tukša kopa ir jebkuras kopas (arī tukšas kopas) apakškopa. Jebkura kopa ir apakškopa atbilstošajā universā.

Ja $A \subseteq B$ un $A \neq B$, tad saka, ka A ir *īsta* B apakškopa ($A \subset B$).

1.1. teorēma. Apakškopu īpašības:

- $A \subseteq A$ (refleksīvā īpašība);
- $A \subseteq B$ un $B \subseteq C \implies A \subseteq C$ (tranzitīvā īpašība);
- $A \subseteq B$ un $B \subseteq A \implies A = B$ (antisimetrijas īpašība).

1.3. piemērs. $A = \{a, b, c\}$. Kopai A ir 8 apakškopas:

- tukšā kopa $\emptyset$,
- viena elementa apakškopas: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$,
- divu elementu apakškopas $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$,
- $A = \{a, b, c\}$.

1.4. Kopu pamatoperācijas

1.4.1. Papildinājums

Par kopas A *papildinājumu* sauc kopu

$$A' = \overline{A} = \{u \in U | u \notin A\}.$$

Par kopas papildinājumu ir jādomā kā par kopu, kas paliek pāri, ja no universa "izmet ārā" visus kopas elementus.

1.4. piemērs. Ja A ir visu pāra skaitļu kopa un $U = \mathbb{Z}$, tad $\overline{A}$ ir visu nepāra skaitļu kopa.

1.4.2. Apvienojums

Par divu kopu A un B *apvienojumu* sauc kopu

$$A \cup B = \{u \in U | u \in A \text{ vai } u \in B\}.$$

Par kopu apvienojumu ir jādomā kā par visu šo kopu elementu apvienošanu vienā kopā ignorējot atkārtojumus, kas var rasties, ja kopām ir kopīgi elementi.

Vispārinājums: dotas vairākas kopas $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, par šo kopu apvienojumu sauc kopu

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{u \in U | u \in A_\beta \text{ vismaz vienam } \beta \in I\}.$$

1.4.3. Šķēlums

Par divu kopu A un B *šķēlumu* sauc kopu

$$A \cap B = \{u \in U | u \in A \text{ un } u \in B\}.$$

Par kopu šķēlumu ir jādomā kā par šo kopu kopējo daļu.

Vispārinājums: dotas kopas $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$, šo kopu šķēlums ir kopa

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{u \in U | u \in A_\beta \text{ katram } \beta \in I\}.$$

1.4.4. Starpība

Par divu kopu A un B *starpību* sauc kopu

$$A \backslash B = \{u \in U | u \in A \text{ un } u \notin B\}.$$

Par divu kopu A un B starpību ir jādomā kā par kopu, kas paliek pāri, ja no A "izmet ārā" visus elementus, kas pieder B.

Ievērosim vienādību $A\backslash B = A \cap \overline{B}$.

1.4.5. Kopu operāciju īpašības

1.2. teorēma. (kopu operāciju īpašības)

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ - *šķēluma un apvienojuma komutativitāte*;
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, - *šķēluma un apvienojuma asociativitāte*;
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ - *distributivitāte*;
4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ - *dualitātes (De Morgāna) likumi;*
5. $\overline{\overline{A}} = A$ - *papildinājuma involūcija*;
6. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ - *šķēluma un apvienojuma idempotence.*

1.5. Kopu vienādības pierādīšana

Kopu vienādības pierādīšana vai atspēkošana - svarīgs uzdevums, kas matemātiķiem ir bieži jārisina dažādos grūtības līmeņos.

1.5.1. Apakškopu iekļaušanas antisimetrijas īpašības izmantošana

Izmantojam zināmo kopu īpašību: $A \subseteq B$ un $B \subseteq A \implies A = B$.

1.5.2. Kopu operāciju īpašību izmantošana

Kopu vienādību var mēģināt pierādīt vai atspēkot izmantojot kopu operāciju īpašības.

1.5. piemērs. $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$.

1.5.3. Eilera diagrammu izmantošana

Nelielam kopu skaitam to operāciju rezultātus var vizualizēt izmantojot Eilera diagrammas un pierādīt, ka pētāmajām kopām atbilst vienādi apgabali.

1.6. Svarīgs kopu piemērs - skaitļu kopas

1.6.1. Naturālie skaitļi

Naturālo skaitļu kopa ($\mathbb{N}$) - skaitļi, ko var iegūt dabiskā skaitīšanas ceļā - $1, 2, 3, \ldots$.

Naturālā skaitļa ģeometriskā interpretācija - garums (piemēram, soļu skaits).

1.6.2. Veselie skaitļi

Veselo skaitļu kopa ($\mathbb{Z}$) - naturālo skaitļu kopas, 0 un negatīvo skaitļu kopas apvienojums.

1.6.3. Racionālie skaitļi

Racionāls skaitlis ($\mathbb{Q}$) - divu veselu skaitļu dalījums.

1.6.4. Reālie skaitļi

Reāls skaitlis - var interpretēt kā punktus uz taisnes, visu reālu skaitļu kopu apzīmē ar $\mathbb{R}$.

2. 1.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

1.1 Dota kopa $A = \{a, b, c, d\}$. Atrast visas iespējamās A apakškopas.

1.2 Dotas kopa A un B: $|A| = n$, $|B| = m$, $|A \cap B| = r$. Cik ir elementu kopā $A \cup B$? (*Norādījums: izmantojiet Eilera diagrammas*)

1.3 Pierādīt vai atspēkot kopu vienādības:

a) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$,

b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(*Norādījums: izmantojiet Eilera diagrammas*)

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

1.5 Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C, \end{cases}$$

ja $B \subseteq A \subseteq C$. (*Norādījums: izmantojiet Eilera diagrammas*)

1.6 Izteikt $\bigcap$, $\bigcup$ ar $\setminus$, Δ.