DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

8.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

1. Determinanta īpašības **5**

1.1. Determinanta izvirzījumi pēc rindām un kolonnām . . 5

1.1.1. Determinanta izvirzījums pēc pirmās kolonnas 5

1.1.2. Determinanta rekursīvā definīcija 6

1.2. Izvirzījums pēc patvaļīgas rindas vai kolonnas 7

2. Determinanta lietojumi **10**

2.1. Matricas invertēšana 10

2.1.1. Invertējamības kritērijs 10

2.1.2. Inversās matricas determinants 10

2.1.3. Inversās matricas atrašana 11

2.2. Krāmera formulas 12

2.3. Ģeometriskā interpretācija 13

2.3.1. Pamatojums 13

2.3.2. 2×2 14

2.3.3. 3×3 14

3. 8.mājasdarbs **15**
3.1. Obligātie uzdevumi 15
3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi 17

Lekcijas mērķis:

- apgūt matricu determinanta īpašības un lietojumus.

Lekcijas kopsavilkums:

- determinantu var definēt rekursīvi,
- var pierādīt dažas jaunas determinanta īpašības,
- determinantus var izmantot matricu invertēšanā, LVS risināšanā un ģeometrijā.

Svarīgākie jēdzieni: determinanta rekursīvā definīcija (determinanta izvirzījums pēc pirmās kolonnas), algebriskā papildinājuma matrica.

Svarīgākie fakti un metodes: Laplasa izvirzījums pēc rindas vai kolonnas, izvirzījuma ortogonalitātes īpašība, inversās matricas atrašana ar *ap* matricas metodi, Krāmera formulu metode, determinanta ģeometriskā interpretācija.

1. Determinanta īpašības

1.1. Determinanta izvirzījumi pēc rindām un kolonnām

1.1.1. Determinanta izvirzījums pēc pirmās kolonnas

A - $n \times n$ matrica. Apzīmēsim ar $\mathbf{A}_{ij}$ matricu, ko iegūst no **A** izsvītrojot i-to rindu un j-to kolonnu.

1.1. piemērs. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & 4 & -1 \\ \hline 3 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 1 & -4 \end{array}\right]$, $\mathbf{A}_{11} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 2 \\ \hline 1 & -4 \end{array}\right]$.

1.1. teorēma. Dota $n \times n$ matrica **A**. Tad

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} (-1)^{i+1} \det \mathbf{A}_{i1}.$$

PIERĀDĪJUMS Netiek dots. ■

1.1.2. Determinanta rekursīvā definīcija

Iepriekšējā teorēma ļauj definēt determinantu *rekursīvi* - sākot no 1×1 līdz jebkuram izmēram.

1.2. piemērs.

$$\det \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right] = a_{11} \det[a_{22}] - a_{21} \det[a_{12}] = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

1.2. Izvirzījums pēc patvaļīgas rindas vai kolonnas

1.2. teorēma. (*Laplasa izvirzījuma formulas*)

$$\det(\mathbf{A}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Big((-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ij})\Big)}_{j\text{-tās kolonnas izvirzījums}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big((-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ij})\Big)}_{i\text{-tās rindas izvirzījums}}.$$

PIERĀDĪJUMS

j-tās kolonnas izvirzījums

Matricai $\mathbf{A}$ veiksim j KEP1 virkni $K_{j,j-1}$, $K_{j-1,j-2}$,...,K_{21}, iegūsim matricu $\mathbf{A}'$ $\Longrightarrow$ $\det\mathbf{A} = (-1)^{j-1}\det\mathbf{A}'$.

Izvirzot $\det\mathbf{A}'$ pēc pirmās kolonnas, iegūsim

$$\det\mathbf{A}' = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a'_{i1}\mathbf{A}'_{i1} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{ij}\mathbf{A}_{ij} \Longrightarrow$$

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{j-1} \det \mathbf{A}' = (-1)^{j-1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{ij} \mathbf{A}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \mathbf{A}_{ij}.$$

Rindas izvirzījums tiek pierādīts līdzīgi izmantojot matricu transponēšanu un īpašību $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$. ■

1.3. piemērs. Atradīsim determinantu izvirzot pēc 2.rindas:

$$\det \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 4 \\ \hline 4 & 4 & -3 \end{array}\right] =$$

$$(-1)1 \cdot \det \left[\begin{array}{c|c} -2 & 1 \\ \hline 4 & -3 \end{array}\right] + 0 \cdot ... + (-1)4 \cdot \det \left[\begin{array}{c|c} 2 & -2 \\ \hline 4 & 4 \end{array}\right] = -18.$$

1.3. teorēma. (*izvirzījuma ortogonalitātes īpašība*)

1. $$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Big((-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ik})\Big)}_{\text{kolonnas izvirzījums}} = 0,\ k \neq j.$$

2. $$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big((-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{kj})\Big)}_{\text{rindas izvirzījums}} = 0,\ k \neq i.$$

PIERĀDĪJUMS

1. Summā ir tādas matricas determinanta izvirzījums pēc j-tās kolonnas, kurai j-tā un k-tā kolonnas ir vienādas.

2. Summā ir tādas matricas determinanta izvirzījums pēc i-tās rindas, kurai i-tā un k-tā rindas ir vienādas. ■

2. Determinanta lietojumi

2.1. Matricas invertēšana

2.1.1. Invertējamības kritērijs

$$\mathbf{A} \in GL(n,k) \iff \det \mathbf{A} \neq 0.$$

2.1.2. Inversās matricas determinants

2.1. teorēma. $\mathbf{A} \in GL(n,k) \implies \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A})^{-1}$.

PIERĀDĪJUMS

$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \implies \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{E} = 1 \implies$

$\det \mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} = \det(\mathbf{A})^{-1}$. ■

2.1.3. Inversās matricas atrašana

$\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Definēsim *algebriskā papildinājuma* matricu

$$\mathbf{A}^{ap} = [(-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ji}]_{n,n}.$$

2.1. piemērs. $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & -3 \\ \hline 1 & 4 \end{array}\right]$, $\mathbf{A}^{ap} = \left[\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ \hline -1 & 2 \end{array}\right]$.

2.2. teorēma.

1. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{ap} = \mathbf{A}^{ap} \cdot \mathbf{A} = (\det \mathbf{A})\mathbf{E}_n$.
2. $\det \mathbf{A} \neq 0 \implies \mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^{ap}$.

PIERĀDĪJUMS

1.

$[\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{ap}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} [\mathbf{A}^{ap}]_{kj} =$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{k+j} \det \mathbf{A}_{jk} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \text{ja } i = j \\ 0, & \text{ja } i \neq j. \end{cases}$$

2. No pirmā apgalvojuma seko

$$\mathbf{A} \cdot \left(\frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^{ap} \right) = \mathbf{E}_n . \blacksquare$$

2.2. Krāmera formulas

Dota kvadrātveida LVS $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\det \mathbf{A} \neq 0$.

$\mathbf{A}_j$ - matrica, kuru iegūst no $\mathbf{A}$ aizvietojot j-to kolonnu ar $\mathbf{b}$.

2.3. teorēma. (*Krāmera formulas*) $x_i = \dfrac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}$.

PIERĀDĪJUMS

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \implies \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\mathbf{A}^{ap})\mathbf{b} =$$

$$\frac{1}{\det \mathbf{A}} \sum_{i=1} [\mathbf{A}^{ap}]_{ij} \mathbf{b}_j = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \underbrace{\sum_{i=1} (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ji} \mathbf{b}_j}_{\mathbf{A}_i \text{ izvirzījums } i\text{-tajā kolonnā}} . \blacksquare$$

2.2. piemērs. $\begin{cases} 2X_1 & -X_2 & = 4 \\ X_1 & +5X_2 & = 7 \end{cases}$, $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ \hline 1 & 5 \end{array}\right]$,

$\mathbf{A}_1 = \left[\begin{array}{c|c} 4 & -1 \\ \hline 7 & 5 \end{array}\right]$,$\mathbf{A}_2 = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 4 \\ \hline 1 & 7 \end{array}\right]$, $\begin{cases} X_1 = 27/11 \\ X_2 = 10/11. \end{cases}$

2.3. Ģeometriskā interpretācija

2.3.1. Pamatojums

Matricas rindas/kolonnas var interpretēt kā vektorus. Kas atbilst det?

2 vektoriem plaknē var konstruēt paralelogramu, 3 vektoriem telpā var konstruēt paralēlskaldni. Tiem ir noteikts laukums vai tilpums.

2.3.2. 2×2

2×2 gadījumā determinantu var interpretēt kā paralelograma laukumu.

Doti 2 vektori $\vec{v} = (x, y)$ un $\vec{u} = (x', y')$. Tad paralelograma, kas ir "uzvilkts" uz šiem vektoriem, laukums $S = \left| \det \left[\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline x' & y' \end{array} \right] \right|$.

2.3.3. 3×3

3×3 gadījumā determinantu var interpretēt kā paralēlskaldņa tilpumu.

Doti 3 vektori $\vec{v} = (x, y, z)$, $\vec{u} = (x', y', z')$, $\vec{w} = (x'', y'', z'')$. Tad paralēlskaldņa, kas ir "uzvilkts" uz šiem vektoriem, tilpums

$$S = \left| \det \left[\begin{array}{c|c|c} x & y & z \\ \hline x' & y' & z' \\ \hline x'' & y'' & z'' \end{array} \right] \right|.$$

3. 8.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

8.1 Atrast determinantus izmantojot izvirzījumu pēc rindas vai kolonnas.

(a) $\left[\begin{array}{c|c|c} 3 & 4 & -2 \\ \hline 1 & -1 & -4 \\ \hline 3 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & x & y \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline -1 & z & t \end{array}\right]$

(c) $\left[\begin{array}{c|c|c|c} a & b & & \\ \hline & a & b & \\ \hline & & a & b \\ \hline b & & & a \end{array}\right]$

8.2 Atrast determinantu.

$$\begin{bmatrix} a & 1 & & \dots & \\ 1 & a & 1 & \dots & \\ & 1 & a & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ & & & 1 & a \end{bmatrix}.$$

(Norādījums: izsakiet matricas determinantu izmantojot izvirzījumu pēc rindas vai kolonnas un mazāku matricu determinantus).

8.3 Atrast $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ izmantojot *ap* matricas metodi.

8.4 Atrisināt LVS izmantojot Krāmera formulas.

(a) $\begin{cases} 3X_1 & -X_2 & = 4 \\ 2X_1 & +5X_2 & = 8. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} X_1 & -X_2 & +2X_3 & = -3 \\ 2X_1 & +3X_2 & -6X_3 & = 4 \\ X_1 & -3X_2 & -2X_3 & = 9. \end{cases}$

8.5 Matricām $\mathbf{A}$ un $\mathbf{A}^{-1}$ visi elementi ir veseli skaitļi. Ar ko var būt vienāds det $\mathbf{A}$?

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

8.6 Atrast determinantus.

(a) $\left[\begin{array}{c|c|c|c} d & a & \dots & a \\ \hline b & d & \dots & a \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline b & b & \dots & d \end{array}\right]$;

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & a & a & \dots & a \\ \hline a & 0 & b & \dots & b \\ \hline a & b & 0 & \dots & b \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline a & b & b & \dots & 0 \end{array}\right]$;

(c) $[(a_i + a_j)^{n-1}]_{n,n}$.