DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

7.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt matricu determinanta jēdzienu, vienkāršākās īpašības un aprēķināšanas metodes.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt funkciju - *determinantu*, kas invertējamai matricai piekārto nenulles skaitli;
- var pētīt determinantu īpašības.

Svarīgākie jēdzieni: determinants.

Svarīgākie fakti un metodes: elementāro matricu determinanti, determinanta īpašības, mazu izmēru matricu determinantu formulas, determinanta aprēķināšana ar triangulācijas metodi.

1. Matricas determinants

Kvadrātveida matricām var definēt un pētīt funkciju, kas kalpo kā *invertējamības indikators*.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ var definēt *determinanta* funkciju

$$\det : Mat(n,k) \longrightarrow\ k.$$

$$\mathbf{A} \longrightarrow \det(\mathbf{A}).$$

Determinanta pamatīpašība $\det(\mathbf{A}) = 0 \iff \mathbf{A}$ nav invertējama.

1.1. Definīcija

Determinanta definēšanā ir vismaz divas pieejas:

- vēsturiskā pieeja - determinants tiek definēts kā matricas elementu funkcija, kas parādās saucējā, risinot kvadrātveida LVS.
- aksiomātiskā pieeja - determinants tiek definēts kā matricas elementu funkcija, kas apmierina noteiktas īpašības.

1.1.1. Vēsturiskā pieeja

Risinot kvadrātveida LVS, var ievērot, ka nezināmie ir racionālas funkcijas no sistēmas koeficientiem un brīvajiem locekļiem.

$n = 1$

LVS $\{\ a_{11}X_1 = b_1$ $\exists$ atrisinājums, ja $a_{11} \neq 0$: $X_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$.

Varam definēt $\det\left[\ a_{11}\ \right] = a_{11} \implies X_1 = \dfrac{\det[b_1]}{\det[a_{11}]}$.

$n = 2$

Risināsim LVS $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = b_2. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ \hline a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & a_{12}/a_{11} & b_1/a_{11} \\ \hline a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & a_{12}/a_{11} & b_1/a_{11} \\ \hline 0 & a_{22} - a_{21}(a_{12}/a_{11}) & b_2 - a_{21}(b_1/a_{11}) \end{array}\right].$$

$$X_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$
$$X_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

$\exists$ tieši viens atrisinājums, ja $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$:

Varam definēt $\det \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \Longrightarrow$

$$X_1 = \frac{\det \left[\begin{array}{c|c} b_1 & a_{12} \\ \hline b_2 & a_{22} \end{array}\right]}{\det \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right]}, X_2 = \frac{\det \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & b_1 \\ \hline a_{21} & b_2 \end{array}\right]}{\det \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right]}$$

1.1. piemērs. $\det \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \end{array}\right] = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3.$

$n = 3$

Ja atkārtotu risinājumu 3×3 LVS, iegūtu šādu rezultātu:

$$X_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, \text{ kur}$$

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

1.2. piemērs. $\det \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 2 & -1 \end{array}\right] = 2 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \cdot 2$
$-0 \cdot 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot 2 = -21.$

Šādā veidā funkcijas det var definēt visiem izmēriem n.

1.1.2. Speciālgadījumi

Mazas n vērtības

Mazām n vērtībām pieņemsim šādas det definīcijas:

- $n = 1 \implies \det \left[\begin{array}{c} a_{11} \end{array} \right] = a_{11};$
- $n = 2 \implies \det \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array} \right] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$
- $n = 3 \implies$

$$\det \left[\begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

1.1.3. Vispārīga determinanta definīcija

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ definēsim $n \times n$ matricu determinanta funkciju

$$\det : Mat(n,k) \longrightarrow k$$

ar šādiem nosacījumiem:

1. $\mathbf{A}$ nav invertējama $\implies \det(\mathbf{A}) = 0$.
2. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$.
3. $\det(\mathbf{E}_n) = 1$.
4. $\det(\mathbf{R}_{pq}) = -1$, $\forall\, p, q$.
5. $\det(\mathbf{R}_p(\lambda)) = \lambda$, $\forall\, p$, $\forall\, \lambda \in k$.
6. $\det(\mathbf{R}_{pq}(\lambda)) = 1$, $\forall\, p, q$, $\forall\, \lambda \in k$.

$\det \mathbf{A}$ var aprēķināt saskaņā ar šādu algoritmu:

- $\mathbf{A}$ nav invertējama $\implies \det \mathbf{A} = 0$;
- $\mathbf{A}$ ir invertējama, $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 ... \mathbf{P}_l$, kur $\mathbf{P}_i$ ir elementāra matrica $\implies$

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{P}_1 ... \det \mathbf{P}_l.$$

Jāpierāda, ka definīcija ir korekta: ja matricu var izteikt kā elementāro matricu reizinājumu divos dažādos veidos, tad determinants no tā nav atkarīgs.

1.1. teorēma. $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{Q}_i$ - elementāras matricas.

$$\mathbf{P}_1 ... \mathbf{P}_u = \mathbf{Q}_1 ... \mathbf{Q}_v \implies \det(\mathbf{P}_1) ... \det(\mathbf{P}_u) = \det(\mathbf{Q}_1) ... \det(\mathbf{Q}_v).$$

PIERĀDĪJUMS Netiek dots, grūts. ■

1.2. Īpašības

1.2. teorēma.

1. Mainot vietām divas matricas rindas vai kolonnas, matricas determinants maina zīmi.
2. Reizinot matricas rindu vai kolonnu ar λ, matricas determinants jāreizina ar λ.

3. Pieskaitot matricas rindai vai kolonnai citu rindu vai kolonnu, reizinātu ar λ, determinants nemainās.
4. Trijstūrveida matricas determinants ir vienāds ar galvenās diagonāles elementu reizinājumu.
5. Transponēšana nemaina determinantu.

PIERĀDĪJUMS

1. $\det(\mathbf{R}_{pq}\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{R}_{pq}) = \det(\mathbf{R}_{pq})\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A})$.

2. $\det(\mathbf{R}_p(\lambda)\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{R}_p(\lambda)) = \det(\mathbf{R}_p(\lambda))\det(\mathbf{A}) = \lambda\det(\mathbf{A})$.

3. $\det\Big(\mathbf{R}_{pq}(\lambda)\mathbf{A}\Big) = \det\Big(\mathbf{A}\mathbf{R}_{pq}(\lambda)\Big) = \det\Big(\mathbf{R}_{pq}(\lambda)\Big)\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$.

4. Apskatīsim augšēji trijstūrveida matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$\exists\ i : a_{ii} = 0 \implies$ galveno rūtiņu skaits $\mathbf{A}$ pakāpienveida formā ir mazāks kā $n \implies r(\mathbf{A}) < n \implies \det(\mathbf{A}) = 0 = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.

Pieņemsim, ka $\forall\ i : a_{ii} \neq 0$.

Veiksim REP virkni $\mathbf{R}_1(\frac{1}{a_{11}})$, $\mathbf{R}_2(\frac{1}{a_{22}})$,...,$\mathbf{R}_n(\frac{1}{a_{nn}})$. Iegūsim augšēji trijstūrveida matricu $\mathbf{A}'$, kurai uz galvenās diagonāles ir 1:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det(\mathbf{A}') = \det\left(\mathbf{R}_1(\frac{1}{a_{11}})\mathbf{R}_2(\frac{1}{a_{22}})...\mathbf{R}_n(\frac{1}{a_{nn}})\mathbf{A}\right) =$$
$$\det\left(\mathbf{R}_1(\frac{1}{a_{11}})\right)\det\left(\mathbf{R}_2(\frac{1}{a_{22}})\right)...\det\left(\mathbf{R}_n(\frac{1}{a_{nn}})\right)\det(\mathbf{A}) =$$
$$\frac{1}{a_{11}}\frac{1}{a_{22}}...\frac{1}{a_{nn}}\det(\mathbf{A})$$

$\Longrightarrow$ $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}...a_{nn}\det(\mathbf{A}')$.

Veicot ar $\mathbf{A}'$ KEP3 "no kreisās puses uz labo" sākot ar pēdējo rindu, iegūsim vienības matricu:

$\mathbf{A}'\mathbf{K}_{n-1}\mathbf{K}_{n-2}...\mathbf{K}_1 = \mathbf{E}_n \Longrightarrow$

$\det(\mathbf{A}')\det(\mathbf{K}_{n-1})\det(\mathbf{K}_{n-2})...\det(\mathbf{K}_1) = \det(\mathbf{E}_n) = 1 \Longrightarrow$

$\det(\mathbf{A}') = 1 \Longrightarrow \det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.

5. $\mathbf{A} \notin GL(n,k) \iff \mathbf{A}^T \notin GL(n,k) \Longrightarrow \det(\mathbf{A}) = 0 \iff \det(\mathbf{A}^T) = 0$.

$\mathbf{A} \in GL(n,k) \implies \mathbf{A} = \mathbf{P}_1 ... \mathbf{P}_l$, kur $\mathbf{P}_i$ ir elementārās matricas $\implies \mathbf{A}^T = \mathbf{P}_l^T ... \mathbf{P}_1^T \implies \det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{P}_l^T) ... \det(\mathbf{P}_1^T)$.

Ar visu gadījumu pārbaudi var pārliecināties, ka $\forall$ elementārai matricai $\mathbf{P}$, izpildās $\det(\mathbf{P}) = \det(\mathbf{P}^T) \implies$

$$\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{P}_l^T) ... \det(\mathbf{P}_1^T) = \det(\mathbf{P}_l) ... \det(\mathbf{P}_1) = \det(\mathbf{A}). \blacksquare$$

1.3. Determinanta aprēķināšanas algoritmi

1.3.1. Mazu izmēru matricas

Ja $n \in \{1, 2, 3\}$, tad $n \times n$ matricas $\mathbf{A}$ determinantu var atrast izmantojot zināmās formulas.

1.3. piemērs. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 = -7.$

1.3.2. Triangulācijas algoritms

$\mathbf{A}$ - $n \times n$ matrica.

$\det(\mathbf{A})$ var aprēķināt saskaņā ar šādu algoritmu:

1. ar REP un KEP palīdzību pārveidot $\mathbf{A}$ trijstūrveida formā:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{RAK} = \mathbf{T};$$

2. atrast $\det(\mathbf{T}) = t_{11}t_{22}...t_{nn}$;
3. $\det(\mathbf{T}) = \det(\mathbf{R})\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{K}) \implies$

$$\det(\mathbf{A}) = \frac{\det(\mathbf{T})}{\det(\mathbf{R})\det(\mathbf{K})}.$$

(lai atrastu $\det(\mathbf{R})$ un $\det(\mathbf{K})$, jāizmanto determinanta multiplikatīvā īpašība).

Ekvivalentais algoritma variants (soli pa solim)

1. Ar REP un KEP palīdzību pārveidot $\mathbf{A}$ trijstūrveida formā, sekot determinanta izmaiņai pēc katra soļa:
   - veicot REP1 vai KEP1 determinants maina zīmi:

$$\det(\mathbf{R}_{ij}\mathbf{A}) = -\det\mathbf{A},$$
$$\det(\mathbf{A}\mathbf{K}_{ij}) = -\det\mathbf{A}.$$

- matricai var "iznest rindas vai kolonnas kopīgo reizinātāju" - izmantot REP2:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_i(\lambda)\mathbf{A}' \Longrightarrow \det(\mathbf{A}) = \lambda \cdot \det(\mathbf{A}')$$

- veicot REP3 determinants nemainās:

$$\det(\mathbf{R}_{ij}(\lambda)\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}.$$

2. pēc tam, kad matrica $\mathbf{A}$ ir pārveidota trijstūrveida formā, atrast determinantu kā diagonāles elementu reizinājumu.

2. 7.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

7.1 Atrast 2×2 matricu determinantus izmantojot summu formulas.

(a) $\left[\begin{array}{c|c} 0.1 & 0.2 \\ \hline 0.4 & 0.8 \end{array}\right]$;

(b) $\left[\begin{array}{c|c} 1 & x \\ \hline y & xy \end{array}\right]$.

7.2 Atrast 3×3 matricu determinantus izmantojot summu formulas.

(a) $\left[\begin{array}{c|c|c} 8 & 9 & 9 \\ \hline 4 & -9 & 7 \\ \hline 7 & -7 & -8 \end{array}\right]$;

(b) $\left[\begin{array}{c|c|c} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ \hline 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ \hline 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{array}\right]$;

(c) $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & a & b \\ \hline b & 1 & a \\ \hline a & b & 1 \end{array}\right]$.

7.3 Atrast matricu determinantus izmantojot triangulācijas algoritmu.

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

7.4 Kāda var būt 3×3 matricas determinanta maksimālā vērtība, ja matricas elementi pieder kopai $\{0, 1\}$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

7.5 Atrast matricu determinantus.

(a) $$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1+x_1 & 1+x_1^2 & ... & 1+x_1^n \\ \hline 1+x_2 & 1+x_2^2 & ... & 1+x_2^n \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline 1+x_n & 1+x_n^2 & ... & 1+x_n^n \end{array}\right];$$

(b) $$\left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & x & ... & x^{n-1} \\ \hline x^{n-1} & 1 & ... & x^{n-2} \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline x & x^2 & ... & 1 \end{array}\right].$$