DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

7.lekcija (papildmateriāls)

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

1. Nezināmo substitūcijas metode

Rindu EP iespējas nezināmo izslēgšanai ir izsmeltas ar Gausa-Ermita metodi.

Var mēģināt izmantot brīvību veikt līdzīgas operācijas ar kolonnām.

Problēma ir tur, ka LVS kolonnu elementārie pārveidojumi nesaglabā atrisinājumu kopas. Šo problēmu var novērst interpretējot kolonnu elementāros pārveidojumus kā nezināmo substitūcijas.

1.1. Kolonnu elementārie pārveidojumi

Ar matricu kolonnām var definēt trīs elementāro pārveidojumu veidus - *kolonnu elementāros pārveidojumus (KEP)* un atbilstošās matricas, kuras iegūst, veicot kolonnu pārveidojumu matricai $\mathbf{E}_n$:

- 1.veida KEP K_{pq} - p-tās un q-tās kolonnas apmaiņa, pārveidojuma matrica $\mathbf{K}_{pq} = \mathbf{R}_{pq}$.
- 2.veida KEP $K_p(\lambda)$, $\lambda \neq 0$ - p-tās kolonnas reizināšana ar λ, pārveidojuma matrica $\mathbf{K}_p(\lambda) = \mathbf{R}_p(\lambda)$.
- 3.veida KEP $K_{pq}(\lambda)$ - p-tās kolonnas reizināšana ar λ un pieskaitīšana q-tajai kolonnai, pārveidojuma matrica $\mathbf{K}_{pq}(\lambda) = \mathbf{R}_{pq}(\lambda)^T$.

1.1. piemērs.

1.1. teorēma.

1. KEP P ar pārveidojuma matricu $\mathbf{P}$ atbilst matricu pārveidojumam $\mathbf{L} \to \mathbf{LP}$.
2. KEP ir invertējami;
   (a) $\mathbf{K}_{pq}^{-1} = \mathbf{K}_{pq}$,
   (b) $\mathbf{K}_p(\lambda)^{-1} = \mathbf{K}_p(1/\lambda)$,
   (c) $\mathbf{K}_{pq}(\lambda)^{-1} = \mathbf{K}_{pq}(-\lambda)$.

PIERĀDĪJUMS
1. Katrā gadījumā var tikt veikta tieša pārbaude.

2. Pierāda līdzīgi rindu pārveidojumiem. ■

1.1. piezīme. Ja ar $\mathbf{A}$ tiek veikta KEP virkne $\mathbf{K}_1, ..., \mathbf{K}_u$, tad summāro pārveidojuma matricu $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 ... \mathbf{K}_u$ var ērti aprēķināt šādā veidā:

1. definēt bloku matricu $\left[\begin{array}{c}\mathbf{E}_n \\ \hline \mathbf{A}\end{array}\right]$,
2. veikt kolonnu pārveidojumus ar matricām $\mathbf{K}_1, ..., \mathbf{K}_u$, rezultātā tiks iegūta matrica $\left[\begin{array}{c}\mathbf{K} \\ \hline \mathbf{AK}\end{array}\right]$.

1.2. Matricas normālā forma

Vai nav iespējams iegūt vairāk nuļļu LVS matricās pēc Ermita formas iegūšanas izmantojot kolonnu pārveidojums?

Kādus KEP var veikt ar Ermita matricu, lai iegūtu pēc iespējas vairāk nuļļu?

$m \times n$ matrica ir *normālajā formā*, ja tā ir bloku matricas formā

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{E}_r & \mathbf{O}_{r,n-r} \\ \hline \mathbf{O}_{m-r,r} & \mathbf{O}_{m-r,n-r}\end{array}\right].$$

Ja vismaz viens no matricu izmēriem ir vienāds ar 0, tad uzskatām, ka matrica ir tukša.

1.2. piemērs. $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$. $\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$. $\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$.

1.2. teorēma. $\forall$ matricu ar REP un KEP var pārveidot normālajā formā.

PIERĀDĪJUMS Dota $m \times n$ matrica $\mathbf{A}$. Pārveidosim $\mathbf{A}$ normālajā formā izmantojot šādu algoritmu

1. Ar REP pārveidojumiem pārveidosim $\mathbf{A}$ rindu Ermita formā $\mathcal{H}(\mathbf{A})$.
2. Sākot no augšas ar katru galveno rūtiņu anulēsim visus citus

nenulles elementus tās rindā veicot 3.veida KEP un pārveidosim $\mathcal{H}(\mathbf{A})$ par matricu **B**.

3. Veicot 1.veida KEP pārveidosim **B** normālajā formā

$$\mathbf{N} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_r & \mathbf{0}_{n-r} \\ \hline \mathbf{0}_{m-r} & \mathbf{0}_{m-r,n-r} \end{array}\right].\blacksquare$$

1.3. piemērs.

1.2. piezīme. $\forall$ $m \times n$ matricai **A** $\exists$ $m \times m$ REP matricas $\mathbf{R}_1, ..., \mathbf{R}_l$ un $n \times n$ KEP matricas $\mathbf{K}_1 ... \mathbf{K}_u$ tādas, ka

$$\mathbf{R}_l ... \mathbf{R}_1 \mathbf{A} \mathbf{K}_1 ... \mathbf{K}_u = \mathbf{N}$$

Tas seko no zināma fakta, ka REP un KEP atbilst reizināšanai ar atbilstošajām matricām no kreisās vai labās puses.

1.3. piezīme. Ievērosim, ka LVS formā $\mathbf{Nx} = \mathbf{b}$ ir ērti risināma.

1.3. Kolonnu elementārie pārveidojumi kā nezināmo substitūcijas

Dota LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Veiksim ar $\mathbf{A}$ KEP virkni ar matricām $\mathbf{K}_1, ..., \mathbf{K}_u$. $\mathbf{A}$ pārveidosies pat $\mathbf{A}\underbrace{\mathbf{K}_1...\mathbf{K}_u}_{=\mathbf{K}} = \mathbf{AK}$.

Atcerēsimies, ka $\forall$ $\mathbf{K}_i$ $\exists$ inversā KEP matrica $\mathbf{K}_i^{-1}$. Apzīmēsim $\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}_u^{-1}...\mathbf{K}_1^{-1}$. Ievērosim, ka

$$\mathbf{KK}^{-1} = \mathbf{K}_1...\mathbf{K}_u\mathbf{K}_u^{-1}...\mathbf{K}_1^{-1} = \mathbf{E}_n.$$

Redzam, ka

$$\mathbf{Ax} = (\mathbf{AE}_n)\mathbf{x} = (\mathbf{AKK}^{-1})\mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{AK})}_{=\mathbf{A}'}\underbrace{(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{x})}_{=\mathbf{y}} = \mathbf{b}.$$

Esam ieguvuši jaunu sistēmu $\mathbf{A}'\mathbf{y} = \mathbf{b}$ attiecībā uz jaunajiem nezināmajiem $\mathbf{y}$.

"Vecos" nezināmos $\mathbf{x}$ un "jaunos" nezināmos saista matricu vienādojumi

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{x},$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{K}\mathbf{y}.$$

1.3. teorēma. $\mathbf{K}$ ir KEP matricu reizinājums. Funkcija $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{K}^{-1}\mathbf{x}$ $\forall$ LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ atrisinājumam $\mathbf{x}^0$ savstarpēji viennozīmīgi piekārto LVS $(\mathbf{AK})\mathbf{y} = \mathbf{b}$ atrisinājumu $\mathbf{y}^0$.

PIERĀDĪJUMS
$\mathbf{Ax}^0 = \mathbf{b} \implies \mathbf{AKK}^{-1}\mathbf{x}^0 = (\mathbf{AK})\mathbf{y}^0 = \mathbf{b}.$

Injektivitāte

$$\begin{cases} \mathbf{K}^{-1}\mathbf{x}_1^0 = \mathbf{y}^0 \\ \mathbf{K}^{-1}\mathbf{x}_2^0 = \mathbf{y}^0 \end{cases} \implies \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x}_1^0 - \mathbf{x}_2^0) = \mathbf{0} \implies$$
$$\mathbf{KK}^{-1}(\mathbf{x}_1^0 - \mathbf{x}_2^0) = \mathbf{K} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_1^0 - \mathbf{x}_2^0 = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_1^0 - \mathbf{x}_2^0.$$

Sirjektivitāte

Izvēlēsimies patvaļīgu LVS $(\mathbf{AK})\mathbf{y} = \mathbf{b}$ atrisinājumu $\widetilde{\mathbf{y}}$. Definēsim $\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{K}\widetilde{\mathbf{y}}$. Redzam, ka

1. $\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{AK}\widetilde{\mathbf{y}} = \mathbf{b}^0 \implies \widetilde{\mathbf{x}}$ apmierina LVS $\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$,
2. $\mathbf{K}^{-1}\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{y}} \implies \widetilde{\mathbf{y}}$ ir funkcijas attēlā.

1.4. Algoritms

Dota LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A}$ ir $m \times n$ matrica. Aprakstīsim algoritmu LVS atrisināšanai izmantojot normālo formu.

1. Definēt bloku matricu $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_n & \mathbf{0}_{n,1} \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]$.
2. Ar REP un KEP pārveidot $\mathbf{A}$ normālajā formā, iegūt matricu $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K} & \mathbf{0}_{n,1} \\ \hline \mathbf{N} & \mathbf{b}' \end{array}\right]$.
3. Atrisināt LVS $\mathbf{Ny} = \mathbf{b}'$ attiecībā uz $\mathbf{y}$.
4. Izmantojot pārveidojumu $\mathbf{x} = \mathbf{Ky}$, atrast $\mathbf{x}$.

1.4. piemērs. Atrisināsim ar nezināmo substitūcijas metodi LVS

$$\begin{cases} X_1 & -X_2 & -2X_3 & -4X_4 & -3X_5 & = -1 \\ X_1 & -X_2 & & +2X_4 & -X_5 & = 1 \\ 2X_1 & -2X_2 & -3X_3 & -5X_4 & -7X_5 & = -5. \end{cases}$$

Ar REP paplašināto matricu var pārveidot Ermita formā

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definēsim bloku matricu

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Veiksim KEP, lai pārveidotu apakšējo kreiso bloku normālajā formā: K_{23}, K_{35}, $K_{14}(-2)$, $K_{15}(1)$, $K_{24}(-3)$.

Iegūsim matricu

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Atrisināsim šo LVS attiecībā uz jaunajiem nezināmajiem:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix}.$$

Sistēma ir

$$\begin{cases} Y_1 & & & = 3 \\ & Y_2 & & = -1 \\ & & Y_3 & = 2. \end{cases}$$

Iegūsim

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix}.$$

Sistēma ir
Pāriesim atpakaļ uz sākotnējiem nezināmajiem $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{K}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2Y_4 + Y_5 \\ Y_5 \\ -1 - 3Y_4 \\ Y_4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1.4. teorēma. Ar nezināmo substitūciju metodi tiek atrasti visi LVS atrisinājumi.

PIERĀDĪJUMS. ■

2. 7.mājasdarbs

2.1. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

7.7 Atrisināt 7.mājasdarbā dotās LVS ar nezināmo substitūcijas metodi.