DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

3.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

1. Permutācijas paritāte (neobligātā patstāvīgā lasīšana)

1.1. Permutācija kā transpozīciju reizinājums

1.1. teorēma. $\forall$ permutāciju var izteikt kā transpozīciju reizinājumu.

PIERĀDĪJUMS $\forall$ permutācija ir neatkarīgu ciklu kompozīcija, pietiek pierādīt teorēmu, ja permutācija ir cikls. Vienkāršības pēc uzskatīsim, ka $A = \{1, 2, ..., n\}$.

Pieņemsim, ka ir dots cikls $f = (1, 2, ..., n-1, n)$. Var redzēt, ka

$$f = (1, n) \circ (1, n-1) \circ ... \circ (1, 2).$$

(apskatīt katra elementa attēlu). ■

1.2. Dekrements un paritāte

$\sigma \in \Sigma_n$: σ sadalījums ciklos satur m ciklus. Lielumu $d(\sigma) = n - m$ sauc par σ *dekrementu.* Lielumu

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{d(\sigma)} = (-1)^{n-m}$$

sauc par σ *paritāti.*

1.2. teorēma.

1. $\forall\ \sigma, \tau \in \Sigma_n$, τ - transpozīcija: $\epsilon(\tau\sigma) = -\epsilon(\sigma)$.
2. $\forall\ \sigma, \sigma' \in \Sigma_n$: $\epsilon(\sigma\sigma') = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma')$.
3. $\forall\ \sigma \in \Sigma_n, \sigma = \tau_1 ... \tau_l$. Transpozīciju skaita l kā vesela skaitļa paritāte nav atkarīga faktorizācijas.

PIERĀDĪJUMS

1. Var pārbaudīt, ka $\tau\sigma$ ciklu skaits ir par vienu lielāks vai mazāks nekā σ ciklu skaits.

2. Ievērosim, ka τ - transpozīcija $\Longrightarrow$

$$\epsilon(\tau) = (-1)^{n-(n-1)} = -1 \Longrightarrow \epsilon(\tau\sigma) = \epsilon(\tau)\epsilon(\sigma).$$

σ un σ' var izteikt kā transpozīciju reizinājumu:

$$\sigma = \tau_1 ... \tau_l,$$
$$\sigma' = \tau_1' ... \tau_j'.$$

$$\epsilon(\sigma\sigma') = \epsilon(\tau_1 ... \tau_l \sigma') = \epsilon(\tau_1)\epsilon(\tau_2 ... \tau_l \sigma') = \epsilon(\tau_1) ... \epsilon(\tau_l)\epsilon(\sigma') = \epsilon(\tau_1) ... \epsilon(\tau_{l-1}\tau_l)\epsilon(\sigma') = \epsilon(\tau_1 ... \tau_l)\epsilon(\sigma') = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma').$$

3. $\sigma = \tau_1 ... \tau_l \Longrightarrow \epsilon(\sigma) = (-1)^l$. No otras puses, pēc paritātes definīcijas $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-m}$. ■

1.1. piezīme. Atkarībā no paritātes permutāciju sauksim par pāra vai nepāra permutāciju.

2. Mājasdarbs

2.1. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

3.8 Permutāciju sauc par involūciju, ja tās neatkarīgo ciklu garums nepārsniedz 2. Pierādīt, ka katru permutāciju var izteikt kā divu involūciju kompozīciju.

3.9 Pierādīt, ka jebkuru permutāciju σ var izteikt kā $d(\sigma)$ transpozīciju kompozīciju.

3.10 Dotas divas permutācijas σ un ρ. Pierādīt, ka permutācijām σ un $\rho\sigma\rho^{-1}$ ir vienāds katra garuma ciklu skaits.

3.11 Dota Σ_n transpozīciju kopa $\mathcal{T}$. Definēsim *transpozīciju grafu* $\Gamma(\mathcal{T})$ šādā veidā:

- $\Gamma(\mathcal{T})$ virsotņu kopa ir $\{1, ..., n\}$,
- $\exists$ šķautne $i - j \iff (ij) \in \mathcal{T}$.

Pierādīt, ka jebkuru Σ elementu var izteikt kā $\mathcal{T}$ elementu reizinājumu $\iff \Gamma(\mathcal{T})$ ir sakarīgs grafs.