DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

11.lekcija (papildmateriāls)

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

1. Determinanta īpašības **3**

1.1. Definīcijas korektuma pierādījums 3

1.1.1. Kolonna ar vienu nenulles elementu 3

1.1.2. Viena matricas elementa izmaiņas iespaids uz determinantu 5

1.1.3. Determinanta rekursīvā definīcija 8

1.2. Kombinatoriskā formula 10

1.3. Izvirzījums pēc rindas vai kolonnas 11

1.4. Binet-Cauchy formula 12

1. Determinanta īpašības

1.1. Definīcijas korektuma pierādījums

1.1.1. Kolonna ar vienu nenulles elementu

Ar ko ir vienāds determinants, ja matricai kādā rindā vai kolonnā ir tikai viens nenulles elements?

1.1. teorēma.

$$\det \mathbf{A} = \det \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \mathbf{r}_1 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}' \end{array}\right] = a_{11} \det \mathbf{A}'.$$

PIERĀDĪJUMS
$a_{11} = 0 \implies \det \mathbf{A} = 0 = 0 \cdot \det \mathbf{A}'.$

$a_{11} = 0 \implies$ var veikt šādus elementāros pārveidojumus:

1. ar a_{11} anulēt visu bloku $\mathbf{r}_1$, bloks $\mathbf{A}'$ neizmainīsies,

2. pārveidot bloku $\mathbf{A}'$ trijstūrveida formā neaiztiekot pirmo rindu un pirmo kolonnu.

Pēc šiem pārveidojumiem iegūsim matricas

$$\begin{cases} \mathbf{RAK} = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}'\mathbf{A}'\mathbf{K}' = \mathbf{T}, \end{cases}$$

kur $\mathbf{R}'$, $\mathbf{K}'$ ir $\mathbf{R}$,$\mathbf{K}$ sašaurinājumi uz bloku $\mathbf{A}'$ $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \det \mathbf{R} = \det \mathbf{R}' \\ \det \mathbf{K} = \det \mathbf{K}' \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \det \mathbf{R} \det \mathbf{A} \det \mathbf{K} = a_{11} \det \mathbf{T} \\ \det \mathbf{R} \det \mathbf{A}' \det \mathbf{K} = \det \mathbf{T} \end{cases} \Longrightarrow \det \mathbf{A} = a_{11} \det \mathbf{A}'.$$

■

1.1. piezīme. No īpašības $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$ seko analoģisks apgalvojums matricai $\left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{k}_1 & \mathbf{A}' \end{array}\right]$.

1.1.2. Viena matricas elementa izmaiņas iespaids uz determinantu

Kā mainās determinants, ja mainās tieši viens elements matricā?

1.2. teorēma. Dota $n \times n$ matrica $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \mathbf{r}_1 \\ \hline \mathbf{k}_1 & \mathbf{A}' \end{array}\right]$. Tad

$$\det \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} a_{11} + b & \mathbf{r}_1 \\ \hline \mathbf{k}_1 & \mathbf{A}' \end{array}\right]}_{\mathbf{A}+b\mathbf{E}_{11}} = \det \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \mathbf{r}_1 \\ \hline \mathbf{k}_1 & \mathbf{A}' \end{array}\right]}_{\mathbf{A}} + \det \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} b & \mathbf{r}_1 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}' \end{array}\right]}_{\mathbf{B}}.$$

PIERĀDĪJUMS

Ar matricām $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} + b\mathbf{E}_{11}$ un $\mathbf{B}$ veiksim vienu un to pašu elementāro pārveidojumu virkni:

1. bloku $\mathbf{A}'$ pārveidosim normālajā formā neaiztiekot pirmo rindu

un pirmo kolonnu, iegūsim matricas

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} a_{11} & * & * \\ \hline * & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\text{no } \mathbf{A}}, \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} a_{11}+b & * & * \\ \hline * & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\text{no } \mathbf{A}+b\mathbf{E}_{11}}, \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} b & * & * \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\text{no } \mathbf{B}}$$

2. izmantojot vienības matricas bloku $\mathbf{E}$ ar 3.veida pārveidojumiem anulēsim daļu no pirmās kolonnas, iegūsim matricas

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} a_{11}+c & * & * \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\text{no } \mathbf{A}}, \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} a_{11}+b+c & * & * \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right]}_{\text{no } \mathbf{A}+b\mathbf{E}_{11}}.$$

$\mathbf{k}'$ garums ir vismaz 2 $\Longrightarrow$ $\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}+b\mathbf{E}_{11}) = \det \mathbf{B} = 0$
$\Longrightarrow$ apgalvojums ir patiess.

$\underline{\mathbf{k}' \text{ garums ir } 0}$ $\Longrightarrow$ esam ieguvuši matricas

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}+c & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}}_{\text{no } \mathbf{A}}, \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}+b+c & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}}_{\text{no } \mathbf{A}+b\mathbf{E}_{11}}, \underbrace{\begin{bmatrix} b & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}}_{\text{no } \mathbf{B}} \Longrightarrow$$

Seko, ka

$$\begin{cases} \det \mathbf{A} = (a_{11}+c)q \\ \det(\mathbf{A}+b\mathbf{E}_{11}) = (a_{11}+b+c)q \\ \det \mathbf{B} = bq \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\det(\mathbf{A}+b\mathbf{E}_{11}) = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}. \blacksquare$$

Dota matrica $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$. Apzīmēsim ar $\mathbf{A}_{ij}$ matricu, ko iegūst no $\mathbf{A}$ izsvītrojot i-to rindu un j-to kolonnu.

1.1. piemērs. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$.

1.1.3. Determinanta rekursīvā definīcija

1.3. teorēma. Dota $n \times n$ matrica $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$. Tad

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1} \det \mathbf{A}_{i1}.$$

PIERĀDĪJUMS Vairākas reizes pielietosim iepriekšējo teorēmu.

$$\det \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right] =$$

$$\det \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right] + \underbrace{\det \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right]}_{=a_{11} \det \mathbf{A}_{11}} =$$

$$= a_{11} \det \mathbf{A}_{11} + \det \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{array} \right] =$$

$$= a_{11} \det \mathbf{A}_{11} + (-1) \det \left[\begin{array}{c|ccc} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \hline 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{array} \right] =$$

$$a_{11} \det \mathbf{A}_{11} + (-1) \left(a_{21} \det \mathbf{A}_{21} + (-1) \det \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{array} \right] \right) =$$

$$a_{11} \det \mathbf{A}_{11} + (-1) a_{21} \det \mathbf{A}_{21} + \det \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{array} \right] = \ldots =$$

$$a_{11}\det \mathbf{A}_{11} + (-1)a_{21}\det \mathbf{A}_{21} + ... + (-1)^{1+n}a_{n1}\det \mathbf{A}_{n1}.$$

■

1.2. piezīme. Iepriekšējā teorēma ļauj definēt determinantu *rekursīvi* - sākot no 1×1 līdz jebkuram izmēram.

1.2. piemērs.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\det[a_{22}] - a_{21}\det[a12] = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

1.2. Kombinatoriskā formula

1.4. teorēma. $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$. Tad

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \epsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}.$$

PIERĀDĪJUMS Izmantot matemātisko indukciju ar parametru n.

■

1.3. Izvirzījums pēc rindas vai kolonnas

1.5. teorēma. (*Laplasa izvirzījuma formulas*)

$$\det(\mathbf{A}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Big((-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ij})\Big)}_{\text{kolonnas izvirzījums}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big((-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ij})\Big)}_{\text{rindas izvirzījums}}.$$

PIERĀDĪJUMS Veicam $i+j$ otrā veida elementāros pārveidojumus, lai elements $a_{i,j}$ nokļūtu adresē $(1,1)$ un visu pārējo rindu un kolonnu kārtība saglabātos.

Lai pierādītu apgalvojumu par kolonnāsm, izmantojam determinanta izvirzījumu pēc pirmās kolonnas.

Lai pierādītu apgalvojumu par rindām, veicam transponēšanu. ■

1.4. Binet-Cauchy formula

$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n,m} \implies \mathbf{AB} = [c_{ij}]_{m,m}$. Ko var pateikt par $\det \mathbf{AB}$?

1.6. teorēma.

1. $m = n \implies \det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$.
2. $m > n \implies \det \mathbf{AB} = 0$.

PIERĀDĪJUMS
1. Determinanta multiplikatīvā īpašība.

2. $\mathbf{AB}$ ir $m \times m$ matrica.

Var pierādīt, ka $r(\mathbf{AB}) \leq \min(m, n) = n < m \implies \det \mathbf{AB} = 0$.
■

$S \subseteq \{1, 2, ..., n\}$, $|S| = m$. Definēsim

- $\mathbf{A}_S$ kā matricu, kas ir iegūta no $\mathbf{A}$ atstājot tikai kolonnas ar indeksiem no kopas S,
- $\mathbf{B}_S$ kā matricu, kas ir iegūta no $\mathbf{B}$ atstājot tikai rindas ar indeksiem no kopas S,

1.3. piemērs. $\mathbf{A} = [234]$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{AB} = [24]$,

$$\det \mathbf{AB} = \det[2]\det[-1] + \det[3]\det[2] + \det[4]\det[5] = 24.$$

1.7. teorēma.

$$\det \mathbf{AB} = \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,n\}} \det \mathbf{A}_S \det \mathbf{B}_S.$$

PIERĀDĪJUMS
■