DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

9.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt invertējamu matricu īpašības un matricu invertēšanas metodi.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt matricu invertējamības jēdzienus, kas vispārina skaitļu invertējamību,

- matricu invertējamības kritēriji ir saistīti ar matricas rangu,
- var pierādīt vairākas invertējamības un neinvertējamības īpašības un aprakstīt matricu invertēšanas algoritmu.

Svarīgākie jēdzieni: labā/kreisā inversā matrica, kvadrātveida matricas inversā matrica.

Svarīgākie fakti un metodes: inverso matricu eksistences kritērijs, invertējamu matricu īpašības, fundamentālā teorēma par invertējamām matricām, kvadrātveida LVS ar invertējamām sistēmas matricām, kvadrātveida matricu invertēšanas algoritms.

1. Matricu invertēšana

Matricām var definēt un pētīt operācijas, kas vispārina skaitļu invertēšanu $a \to \frac{1}{a}$.

Ievērosim, ka skaitļiem $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, ja $a \neq 0$.

Matricu algebrā:

- skaitļa 1 analogs ir vienības matrica $\mathbf{E}$;
- ja ir dota matrica $\mathbf{A}$, var meklēt matricas, kuras reizinot ar $\mathbf{A}$ no labās vai kreisās puses, iegūsim vienības matricas.

1.1. Definīcijas un pamatīpašības

$\mathbf{A}$ ir $m \times n$ matrica.

$n \times m$ matrica $\mathbf{A}_L$ ir $\mathbf{A}$ *labā inversā matrica*, ja

$$\mathbf{A}\mathbf{A}_L = \mathbf{E}_m.$$

$n \times m$ matrica $\mathbf{A}_K$ ir $\mathbf{A}$ *kreisā inversā matrica*, ja

$$\mathbf{A}_K \mathbf{A} = \mathbf{E}_n.$$

1.1. piezīme. $\mathbf{A}_L$, $\mathbf{A}_K$ un vienības matricu izmēri ir noteikti viennozīmīgi.

1.1. piemērs. $\mathbf{A} = [a] \implies \mathbf{A}_K = \mathbf{A}_L = [\frac{1}{a}]$.

1.1. teorēma. $\mathbf{A}$ ir $m \times n$ matrica $\implies$

1. $\exists\ \mathbf{A}_L \iff r(\mathbf{A}) = m$,
2. $\exists\ \mathbf{A}_K \iff r(\mathbf{A}) = n$.

PIERĀDĪJUMS

1. Pamatideja - risināt matricu vienādojumu $\mathbf{AX} = \mathbf{E}_m$ un interpretēt to kā LVS atiecībā uz $\mathbf{X}$ elementiem.

- Izteiksim $\mathbf{X}$ un $\mathbf{E}_m$ kā kolonnu bloku matricas:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|...|\mathbf{x}_m],$$

$$\mathbf{E}_m = [\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|...|\mathbf{e}_m].$$

- Apskatīsim matricu vienādojuma kreiso pusi

$$\mathbf{AX} = [\mathbf{Ax}_1|\mathbf{Ax}_2|...|\mathbf{Ax}_m].$$

- Salīdzinot kreisās un labās puses matricas pa rindām, iegūsim sistēmu

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{Ax}_1 = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{e}_2 \\ ... \\ \mathbf{Ax}_m = \mathbf{e}_m. \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccc} \mathbf{Ax}_1 & +\mathbf{Ox}_2 & +... & +\mathbf{O}x_m & = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{Ox}_1 & +\mathbf{Ax}_2 & +... & ... & = \mathbf{e}_2 \\ ... & ... & ... & ... & = ... \\ \mathbf{Ox}_1 & +\mathbf{Ox}_2 & +... & +\mathbf{Ax}_m & = \mathbf{e}_m \end{array}\right.$$

- Pārveidosim šo sistēmu LVS formā:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & & & \\ & \mathbf{A} & & \\ & & ... & \\ & & & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ ... \\ \mathbf{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ ... \\ \mathbf{e}_m \end{bmatrix}.$$

Pārveidosim sistēmas paplašināto matricu ar REP saskaņā ar šādu algoritmu:

- katru no joslām, kurā ir viens bloks $\mathbf{A}$ pārveidosim pakāpienveida formā veicot REP joslas robežās;
- vienkāršības dēļ katrā joslā veiksim vienu un to pašu REP virkni.

Pēc šiem pārveidojumiem iegūsim paplašināto matricu

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{A}' & & & & \mathbf{e}'_1 \\ \hline & \mathbf{A}' & & & \mathbf{e}'_2 \\ \hline & & ... & & ... \\ \hline & & & \mathbf{A}' & \mathbf{e}'_m \end{array}\right]$$

Ievērosim, ka matrica $\mathbf{E}' = [\mathbf{e}'_1|...|\mathbf{e}'_m]$ tiek iegūta no $\mathbf{E}_m$ ar REP pārveidojumu palīdzību.

$r(\mathbf{A}) < m \Longrightarrow$ $\mathbf{A}'$ satur nulles rindas $\Longrightarrow$ lielā sistēmas matrica satur nulles rindas katras joslas noteiktā vietā $\Longrightarrow$ lielā sistēma satur apakšsistēmu

$$\begin{cases} 0 = e'_{i1} \\ \dots \\ 0 = e'_{im}, \end{cases}$$

kur $\mathbf{r}' = [e'_1, ..., e'_m]$ ir kāda matricas $\mathbf{E}'$ rinda. Bet $r(\mathbf{E}') = m \implies \mathbf{r}' \neq \mathbf{0} \implies$ LVS un tādējādi arī matricu vienādojumam $\mathbf{AX} = \mathbf{E}_m$ nav atrisinājumu.

$r(\mathbf{A}) = m \implies \forall$ sistēmas matricas rinda satur galveno rūtiņu $\implies$ LVS un tādējādi arī matricu vienādojums ir atrisināms.

2. Pētīsim matricu vienādojumu $\mathbf{XA} = \mathbf{E}_n \iff \mathbf{A}^T\mathbf{X}^T = \mathbf{E}_n$.
Saskaņā ar 1. $\exists\ \mathbf{X} \iff r(\mathbf{A}^T) = n$.
$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})^T \implies \exists\ \mathbf{X} \iff r(\mathbf{A}) = n$. ■

1.2. teorēma. $\mathbf{A}$ ir $m \times n$ matrica, $\exists\ \mathbf{A}_L, \exists\ \mathbf{A}_K \implies$

1. $m = n$,
2. $\mathbf{A}_L = \mathbf{A}_K$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\exists\ \mathbf{A}_L, \exists\ \mathbf{A}_K \implies r(\mathbf{A}) = m = n.$

2. $\exists\ \mathbf{A}_L, \exists\ \mathbf{A}_K, m = n \implies \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{A}_L = \mathbf{E}_m \\ \mathbf{A}_K\mathbf{A} = \mathbf{E}_m \end{cases} \implies$

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{A}_K\mathbf{E}_n = \mathbf{A}_K(\mathbf{A}\mathbf{A}_L) = (\mathbf{A}_K\mathbf{A})\mathbf{A}_L = \mathbf{E}_n\mathbf{A}_L = \mathbf{A}_L. \blacksquare$$

1.2. Kvadrātveida matricu invertēšana

Ja $n \times n$ matricai $\mathbf{A}$ $\exists$ *inversā matrica* $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}_K = \mathbf{A}_L$, tad $\mathbf{A}$ sauc par *invertējamu matricu.*

Visu invertējamu $n \times n$ matricu kopu ar elementiem skaitļu laukā k apzīmē ar $GL(n, k)$ (*general linear group*), $GL(n, k) \subsetneq Mat(n, n, k)$.

Ja kvadrātveida matricai neeksistē inversā matrica, to sauc par *neinvertējamu* (*singulāru, deģenerētu*).

1.2.1. Invertējamu matricu īpašības

1.3. teorēma.

1. $\mathbf{E}_n^{-1} = \mathbf{E}_n$.
2. $\mathbf{R}_{pq}^{-1} = \mathbf{R}_{pq}$.
3. $\mathbf{R}_p(\lambda)^{-1} = \mathbf{R}_p(\frac{1}{\lambda})$.
4. $\mathbf{R}_{pq}(\lambda)^{-1} = \mathbf{R}_{pq}(-\lambda)$.

PIERĀDĪJUMS
1. $\mathbf{E}_n \underbrace{\mathbf{E}_n}_{\mathbf{E}_n^{-1}} = \mathbf{E}_n$.

2. Veicot 1.veida REP divas reizes, iegūsim sākotnējo matricu $\Longrightarrow$

$$\mathbf{R}_{pq} \underbrace{\mathbf{R}_{pq}}_{=\mathbf{R}_{pq}^{-1}} = \mathbf{E}_m \Longrightarrow \mathbf{R}_{pq}^{-1} = \mathbf{R}_{pq}.$$

3. Veicot 2.veida REP virkni $R_p(\lambda)$, $R_p(\frac{1}{\lambda})$, iegūsim sākotnējo matricu $\Longrightarrow$

$$\mathbf{R}_p(\frac{1}{\lambda})\mathbf{R}_p(\lambda) = \mathbf{E}_m \Longrightarrow \mathbf{R}_p(\lambda)^{-1} = \mathbf{R}_p(\frac{1}{\lambda}).$$

4. Veicot 3.veida REP virkni $R_{pq}(\lambda)$, $R_{pq}(-\lambda)$, iegūsim sākotnējo matricu $\Longrightarrow$

$$\mathbf{R}_{pq}(-\lambda)\mathbf{R}_{pq}(\lambda) = \mathbf{E}_m \Longrightarrow \mathbf{R}_{pq}(\lambda)^{-1} = \mathbf{R}_{pq}(-\lambda).\blacksquare$$

1.4. teorēma. (*fundamentālā teorēma par invertējamām matricām*) $\mathbf{A}$ ir $n \times n$ matrica. Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.

1. $\exists\ \mathbf{A}_L$.
2. $\exists\ \mathbf{A}_K$.
3. $r(\mathbf{A}) = n$.
4. $\mathcal{H}(\mathbf{A}) = \mathbf{E}_n$.
5. $\mathbf{A}$ ir vienāda ar elementāro matricu reizinājumu.

PIERĀDĪJUMS 1., 2., 3. ir ekvivalenti saskaņā ar agrāk pierādītu teorēmu:

$$\exists\ \mathbf{A}_L \iff r(\mathbf{A}) = n \iff \exists\ \mathbf{A}_K$$

<u>3. $\Longrightarrow$ 4.</u>
$r(\mathbf{A}) = n \Longrightarrow \mathcal{H}(\mathbf{A})$ ir n galvenās rūtiņas $\Longrightarrow \mathcal{H}(\mathbf{A}) = \mathbf{E}_n$.

<u>4. $\Longrightarrow$ 3.</u>
$r(\mathbf{E}_n) = n \Longrightarrow r(\mathbf{A}) = n$.

<u>3. $\Longrightarrow$ 5.</u>
$r(\mathbf{A}) = n \Longrightarrow$ **A** ar REP var pārveidot par Ermita matricu $\mathbf{E}_n$:

$$(\mathbf{R}_1 ... \mathbf{R}_l)\mathbf{A} = \mathbf{E}_n \Longrightarrow \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_1 ... \mathbf{R}_l\mathbf{A} = \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{E}_n \Longrightarrow$$

$$\mathbf{R}_2 ... \mathbf{R}_l\mathbf{A} = \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{E}_n \Longrightarrow \ ... \ \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{R}_l^{-1} ... \mathbf{R}_1^{-1}.$$

<u>5. $\Longrightarrow$ 3.</u>
A ir elementāro matricu reizinājums $\Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{Q}_1 ... \mathbf{Q}_u \Longrightarrow$

$$\mathbf{Q}_u^{-1} ... \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{Q}_u^{-1} ... \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{Q}_1 ... \mathbf{Q}_u = \mathbf{E}_n$$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{A}$ ar REP palīdzību var pārvērst par $\mathbf{E}_n$ $\Longrightarrow$ $r(\mathbf{A}) = n$. ■

1.5. teorēma. $\mathbf{A}$ ir invertējama $n \times n$ matrica.

1. $\mathbf{A}^{-1}$ ir noteikta viennozīmīgi.
2. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.
3. $(\lambda \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}$, $\lambda \neq 0$.
4. $\mathbf{B}$ ir invertējama $n \times n$ matrica $\Longrightarrow$
$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$
5. $(\mathbf{A}^{l})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{l}$, $\forall\, l \in \mathbb{N}$.
6. $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$.

PIERĀDĪJUMS

1. Pieņemsim, ka $\mathbf{A}$ $\exists$ divas inversās matricas $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{AY} = \mathbf{XA} = \mathbf{YA} = \mathbf{E}_n \Longrightarrow$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{E}_n = \mathbf{X}(\mathbf{A}\mathbf{Y}) = (\mathbf{X}\mathbf{A})\mathbf{Y} = \mathbf{E}_n\mathbf{Y} = \mathbf{Y}.$$

2. $\underbrace{\mathbf{A}}_{(\mathbf{A}^{-1})^{-1}} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n.$

3. $(\lambda\mathbf{A})(\frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}) = (\lambda \cdot \frac{1}{\lambda})(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{E}_n.$

4. $(\mathbf{A}\mathbf{B})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\underbrace{\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}}_{=\mathbf{E}_n})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n.$

5.$(\mathbf{A}^l)(\mathbf{A}^{-1})^l = \underbrace{\mathbf{A}...\mathbf{A}}_{l \text{ reizes}}\underbrace{\mathbf{A}^{-1}...\mathbf{A}^{-1}}_{l \text{ reizes}} = \mathbf{A}...(\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}}_{=\mathbf{E}_n})...\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n.$

6. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n \implies (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{E}_n^T = \mathbf{E}_n \implies$
$(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = \mathbf{E}_n \implies (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T.$ ■

1.2. piezīme. Definēsim $\mathbf{A}^{-l} = (\mathbf{A}^{-1})^l, \forall\, l \in \mathbb{N}.$

1.3. piezīme. $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_l$ ir invertējamas vienāda izmēra matricas $\Longrightarrow$

$$(\mathbf{A}_1 ... \mathbf{A}_l)^{-1} = \mathbf{A}_l^{-1} ... \mathbf{A}_1^{-1}.$$

1.4. piezīme. ($GL(n,k)$ *ir grupa*)

1. $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in GL(n,k) \Longrightarrow \mathbf{AB} \in GL(n,k)$ ($GL(n,k)$ ir slēgta attiecībā uz reizināšanu).
2. $\mathbf{A} \in GL(n,k) \Longrightarrow \mathbf{A}^{-1} \in GL(n,k)$ ($GL(n,k)$ ir slēgta attiecībā uz inverso elementu pievienošanu).
3. $\mathbf{E}_n \in GL(n,k)$($GL(n,k)$ satur *neitrālo elementu*).

1.5. piezīme. Invertējamu matricu summa var nebūt invertējama - $GL(n,k)$ nav slēgta attiecībā uz saskaitīšanu:

$$\mathbf{E}_n + (-\mathbf{E}_n) = \mathbf{O}_n.$$

Neinvertējamu matricu summa var būt invertējama:

$$\mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{22} = \mathbf{E}_2.$$

1.6. teorēma. Visas dotās matricas ir kvadrātveida un vienāda izmēra.

$$\mathbf{S} \notin GL(n,k) \implies \begin{cases} \mathbf{AS} \notin GL(n,k) \\ \mathbf{SA} \notin GL(n,k), \ \forall \ \mathbf{A} \end{cases}$$

PIERĀDĪJUMS

1. $\mathbf{AS} = \mathbf{X}$- invertējama $\implies$ $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AS} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{E} \implies$ $(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{S} = \mathbf{E} \implies \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A} \implies \mathbf{S}$ - invertējama - pretruna.

Līdzīgi pierāda apgalvojumu par **SA**. ■

1.7. teorēma. **A** ir $n \times n$ matrica. Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.

1. $\exists\ \mathbf{A}^{-1}$.
2. LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ $\exists$ viens atrisinājums $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
3. LVS $\mathbf{Ax} = 0$ $\exists$ tikai triviālais atrisinājums $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

PIERĀDĪJUMS

$\underline{1 \implies 2}$

$\exists\ \mathbf{A}^{-1} \implies \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \implies \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ - viennozīmīgi noteikts atrisinājums.

$\underline{2 \implies 3}$

LVS $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $\exists$ viens atrisinājums $\implies r(\mathbf{A}) = n \implies$ LVS $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ $\exists$ tikai triviālais atrisinājums.

$\underline{3 \implies 1}$

LVS $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ $\exists$ tikai triviālais atrisinājums $\implies r(\mathbf{A}) = n \implies$ $\exists\ \mathbf{A}^{-1}$. ■

1.2.2. Kvadrātveida matricas invertēšanas algoritms

Aprakstīsim algoritmu, ar kuru var atrast invertējamas $n \times n$ matricas $\mathbf{A}$ inverso matricu $\mathbf{A}^{-1}$.

Algoritma pamatideja: $\mathbf{A}$ ir invertējama $\implies$ $\mathbf{A}$ ar REP var pārvērst Ermita matricā $\mathbf{E}_n$:

$$\underbrace{\mathbf{R}_1 ... \mathbf{R}_l}_{=\mathbf{A}^{-1}} \mathbf{A} = \mathbf{E}_n.$$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{R}_1 ... \mathbf{R}_l$ ir vienāds ar REP virknes pielietošanas rezultātu attiecībā uz $\mathbf{E}_n$.

Problēma ir pēc iespējas ērtāk aprēķināt reizinājumu $\mathbf{R}_1 ... \mathbf{R}_l$, ko var veikt ar atbilstošas bloku matricas palīdzību.

Algoritms:

1. Definēsim bloku matricu $\mathbf{B} = [\mathbf{E}_n | \mathbf{A}]$.
2. Veiksim ar $\mathbf{B}$ REP tā, lai otrajā blokā iegūtu $\mathbf{E}_n$, šī soļa rezultātā tiks iegūta bloku matrica $[\mathbf{X} | \mathbf{E}_n]$, kur $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$.

1.2. piemērs. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Konstruējam bloku matricu

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right].$$

Ar REP virkni $R_{12}(2)$, $R_2(1/7)$, $R_{21}(-2)$ pārveidosim šo matricu formā

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3/7 & -2/7 & 1 & 0 \\ 2/7 & 1/7 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Redzam, ka $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & -2/7 \\ 2/7 & 1/7 \end{bmatrix}$.

2. 9.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

9.1 Pierādīt, ka matricai

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 5 & 12 \\ -4 & 11 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

neeksistē ne labā, ne kreisā inversā matrica.

9.2 Atrast inversās matricas:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$,

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

9.3 Atrast inversās matricas:

(a) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$,

(b) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$.

9.4 Dota invertējama kvadrātveida matrica $\mathbf{A}$. Kā mainās $\mathbf{A}^{-1}$, ja matricai $\mathbf{A}$

(a) i-to rindu reizina ar $\lambda \neq 0$,

(b) maina vietām j-to un j'-to kolonnu?

9.5 Kvadrātveida matricu $\mathbf{A}$ sauc par *nilpotentu*, ja eksistē $n \in \mathbb{N}$: $\mathbf{A}^n = \mathbf{O}$.

(a) Pierādīt, ka nilpotenta matrica nevar būt invertējama.

(b) Atrast visas nilpotentas 2×2 matricas.

(c) Pierādīt, ka ja $\mathbf{A}$ ir nilpotenta, tad $\mathbf{E} + \mathbf{A}$ ir invertējama, atrast $(\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

9.6 $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m,k}$. Pierādīt, ka matricu vienādojums $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ir atrisināms $\iff r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}|\mathbf{B}])$.

9.7 $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n,k}$. Pierādīt, ka matricu vienādojums $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ir viennozīmīgi atrisināms $\iff$ $\mathbf{A}$ ir invertējama matrica.

9.8 Izpētīt matricu vienādojuma $\mathbf{AXC} = \mathbf{B}$ atrisināmību atkarībā no matricām $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ un $\mathbf{C}$.