DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

8.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt matricu normālās formas un rangu jēdzienus.

Lekcijas kopsavilkums:

- ar kolonnām var veikt kolonnu elementāros pārveidojumus (KEP),
- ar REP un KEP matricu var pārveidot maksimāli vienkāršotā formā - normālajā formā,
- galveno rūtiņu skaits pakāpienveida formā ir svarīgs matricas invariants - rangs, kas nemainās veicot REP un KEP.

Svarīgākie jēdzieni: kolonnu elementārie pārveidojumi (KEP) un to elementārās matricas, matricas normālā forma, rindu rangs, kolonnu pakāpienveida un Ermita formas, kolonnu rangs, rangs.

Svarīgākie fakti un metodes: KEP īpašības, algoritms matricas pieveidošanai normālā formā, Ermita formas vienīgums, REP saglabā rindu rangu, Kronekera-Kapelli teorēma, EP saglabā abus rangus, rangu vienādība, normālās formas vienīgums, matricas ranga īpašības.

1. Kolonnu elementārie pārveidojumi un matricas normālā forma

1.1. Kolonnu elementārie pārveidojumi

Ar matricu kolonnām var definēt trīs veidu *kolonnu elementāros pārveidojumus (KEP)* un atbilstošās elementārās matricas, kuras iegūst, veicot kolonnu pārveidojumu matricai $\mathbf{E}_n$:

- 1.veida KEP K_{pq} - p-tās un q-tās kolonnas apmaiņa, $\mathbf{K}_{pq} = \mathbf{R}_{pq}$.
- 2.veida KEP $K_p(\lambda)$, $\lambda \neq 0$ - p-tās kolonnas reizināšana ar λ, $\mathbf{K}_p(\lambda) = \mathbf{R}_p(\lambda)$.
- 3.veida KEP $K_{pq}(\lambda)$ - p-tās kolonnas reizināšana ar λ un pieskaitīšana q-tajai kolonnai,

$$\mathbf{K}_{pq}(\lambda) = \mathbf{R}_{pq}(\lambda)^T = \mathbf{R}_{qp}(\lambda).$$

1.1. piemērs. $\mathbf{K}_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{12}(\lambda) = \mathbf{R}_{21}(\lambda).$

1.1. teorēma.

1. KEP P ar pārveidojuma matricu $\mathbf{P}$ atbilst matricu pārveidojumam $\mathbf{L} \to \mathbf{LP}$.
2. KEP ir invertējami;
   (a) $\mathbf{K}_{pq}^{-1} = \mathbf{K}_{pq}$,
   (b) $\mathbf{K}_p(\lambda)^{-1} = \mathbf{K}_p(1/\lambda)$,
   (c) $\mathbf{K}_{pq}(\lambda)^{-1} = \mathbf{K}_{pq}(-\lambda)$.

PIERĀDĪJUMS
1. Katrā gadījumā var tikt veikta tieša pārbaude.

2. Pierāda līdzīgi rindu pārveidojumiem. ■

1.1. piezīme. Ja ar $m \times n$ matricu $\mathbf{A}$ tiek veikta KEP virkne $\mathbf{K}_1, ..., \mathbf{K}_u$, tad summāro pārveidojuma matricu $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 ... \mathbf{K}_u$ var ērti aprēķināt šādā veidā:

1. definēt bloku matricu $\left[\begin{array}{c} \mathbf{E}_n \\ \hline \mathbf{A} \end{array}\right]$,

2. veikt kolonnu pārveidojumus ar matricām $\mathbf{K}_1, ..., \mathbf{K}_u$, rezultātā tiks iegūta matrica $\left[\begin{array}{c}\mathbf{K}\\ \hline \mathbf{AK}\end{array}\right]$.

Ja ir jāseko gan REP, gan KEP, tad ir jādefinē bloku matrica

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{O} & \mathbf{E}\\ \hline \mathbf{E} & \color{red}{\mathbf{A}}\end{array}\right]$$

un jāveic EP ar $\mathbf{A}$ bloka rindām vai kolonnām. Vienības matricu blokos tiks iekodēta pārveidojumu vēsture.

1.2. Matricas normālā forma

Kādus KEP var veikt ar Ermita matricu, lai iegūtu pēc iespējas vairāk nuļļu?

$m \times n$ matrica ir *normālajā formā*, ja tā ir bloku matricas formā

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{E}_r & \mathbf{O}_{r,n-r}\\ \hline \mathbf{O}_{m-r,r} & \mathbf{O}_{m-r,n-r}\end{array}\right].$$

Ja vismaz viens no matricu izmēriem ir vienāds ar 0, tad uzskatām, ka matrica ir tukša.

1.2. piemērs. $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. $\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.
$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$. $\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$. $\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$.

1.2. teorēma. $\forall$ matricu ar REP un KEP var pārveidot normālajā formā.

PIERĀDĪJUMS Dota $m \times n$ matrica $\mathbf{A}$. Pārveidosim $\mathbf{A}$ normālajā formā izmantojot šādu algoritmu

1. Ar REP pārveidojumiem pārveidosim $\mathbf{A}$ Ermita formā $\mathcal{H}(\mathbf{A})$.
2. Sākot no augšas ar katru galveno rūtiņu anulēsim visus citus nenulles elementus tās rindā veicot 3.veida KEP "pa labi" un

pārveidosim $\mathcal{H}(\mathbf{A})$ par matricu $\mathbf{B}$, kurā tikai galveno rūtiņu elementi nav 0.

3. Veicot 1.veida KEP pārveidosim $\mathbf{B}$ normālajā formā

$$\mathbf{N} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_r & \mathbf{O}_{n-r} \\ \hline \mathbf{O}_{m-r} & \mathbf{O}_{m-r,n-r} \end{array}\right] . \blacksquare$$

1.3. piemērs. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & -2 \\ 3 & 9 & -11 & -5 \\ 2 & 6 & -7 & -3 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & & \\ & 1 & \\ \hline & & \end{array}\right].$

Pārveidojumu virkne $R_{12}(-3)$, $R_{13}(-2)$, $R_{23}(-1)$, $R_{21}(4)$, $K_{14}(-2)$, $K_{12}(-3)$, $K_{34}(-1), K_{23}$.

2. Matricas rangi

2.1. Matricas rindu rangs

2.1.1. Matricas Ermita formas vienīgums

2.1. piezīme. Matricas pakāpienveida forma nav noteikta viennozīmīgi: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ var pārveidot pakāpienveida formā vismaz divos veidos:

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,
- $\begin{bmatrix} 1 & 5/4 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, mainot rindas pirmajā solī.

Abas pakāpienveida matricas pārveidojas uz vienu Ermita matricu $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Neviennozīmība var būt rūtiņās, kas atrodas virs galvenajām.

2.1. teorēma. Katru matricu ar REP palīdzību var pārveidot uz viennozīmīgi noteiktu matricu Ermita formā (matricas Ermita forma ir viennozīmīgi noteikta).

PIERĀDĪJUMS Izmantosim matemātisko indukciju ar parametru n (kolonnu skaits).

<u>Indukcijas bāze</u> $n = 1 \Longrightarrow$ apgalvojums ir patiess, jo Ermita forma ir $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$, ja matrica ir $\mathbf{O}_{m,1}$ vai $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$.

<u>Indukcijas solis</u> Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess visām matricām, kuru kolonnu skaits ir stingri mazāks nekā n un pierādīsim, ka tad apgalvojums ir patiess, ja kolonnu skaits ir vienāds ar n.

Pieņemsim, ka $\exists$ $m \times n$ matrica $\mathbf{A}$, kurai ir dažādas Ermita formas

$\mathbf{H}_1$ un $\mathbf{H}_2$. Sadalīsim Ermita formas blokos:

$$\mathbf{H}_1 = [\mathbf{F}_1|\mathbf{k}_1],$$

$$\mathbf{H}_2 = [\mathbf{F}_2|\mathbf{k}_2].$$

Bloki $\mathbf{F}_1$ un $\mathbf{F}_2$ arī ir Ermita matricas, jo nogriežot kolonnu Ermita matricas īpašība saglabājas $\Longrightarrow$ saskaņā ar indukcijas pieņēmumu $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}$.

Jāpierāda, ka $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$.

Domāsim par sākotnējo matricu $\mathbf{A}$ kā par LVS paplašināto matricu. Ir iespējami divi gadījumi.

$\mathbf{A}$ atbilst nesaderīgai LVS.

Tad pēdējā kolonnā (brīvo locekļu kolonnā) ir nenulles skaitlis zem $\mathbf{F}$ zemākās nenulles rindas $\Longrightarrow$ $\mathbf{A}$ Ermita formā pēdējā kolonnā ir 1 vienā noteiktā vietā $\Longrightarrow$ $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$.

$\mathbf{A}$ atbilst saderīgai LVS.

$\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2 \implies$ vismaz vienā LVS vienādojumā iegūsim pretrunu:

$$a_{i1}X_1 + \ldots + a_{in}X_n = \underbrace{b_i}_{\text{no } \mathbf{k}_1} \neq \underbrace{b'_i}_{\text{no } \mathbf{k}_2} . \blacksquare$$

Matricas $\mathbf{A}$ Ermita formu apzīmēsim ar $\mathcal{H}(\mathbf{A})$.

2.1.2. Definīcija un īpašības

2.2. teorēma. Matricas pakāpienveida formas galveno rūtiņu skaits un adreses ir noteiktas viennozīmīgi (neatkarīgi no REP izvēles).

PIERĀDĪJUMS Matricas Ermita forma tiek iegūta no normalizētas pakāpienveida formas veicot REP uz augšu, izmantojot jau esošās galvenās rūtiņas. Šajos REP galvenās rūtiņas nemainās.

Matricas Ermita forma ir noteikta viennozīmīgi $\implies$ galveno rūtiņu skaits un adreses ir noteiktas viennozīmīgi. $\blacksquare$

Par matricas $\mathbf{A}$ *rindu rangu* $rr(\boldsymbol{A})$ sauc galveno rūtiņu skaitu jebkurā $\mathbf{A}$ pakāpienveida formā.

Lai atrastu $rr(\mathbf{A})$, pietiek pārveidot $\mathbf{A}$ pakāpienveida formā un saskaitīt galvenās rūtiņas.

2.3. teorēma. REP saglabā rindu rangu.

PIERĀDĪJUMS Atcerēsimies, ka REP ir invertējami - $\forall\, R\ \exists\, R^{-1}$:

$$R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ R = \mathrm{id}\,.$$

Seko, ka arī elementārās matricas ir invertējamas: $\exists\ \mathbf{R}^{-1}$:

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{E}.$$

Pieņemsim, ka $\mathbf{A}$ var pārveidot uz Ermita formu $\mathbf{H}$ ar REP virkni $R_1, ..., R_l$.

Pieņemsim, ka ar $\mathbf{A}$ tiek veikts REP $R \Longrightarrow$
$\mathbf{A}' = \mathbf{R}\mathbf{A} \Longrightarrow \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}' = \underbrace{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}}_{=\mathbf{E}}\mathbf{A} \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}' \Longrightarrow$

$\mathbf{A}'$ var pārveidot uz $\mathbf{H}$ ar REP virkni $R^{-1}, R_1, ..., R_l \Longrightarrow \mathcal{H}(\mathbf{A}) = \mathcal{H}(\mathbf{A}') \Longrightarrow rr(\mathbf{A}) = rr(\mathbf{A}')$. ■

2.4. teorēma. (Kronekera-Kapelli teorēma) LVS ir saderīga $\iff$ tās sistēmas matricas rindu rangs ir vienāds ar paplašinātās matricas rindu rangu.

PIERĀDĪJUMS Dota LVS ar sistēmas matricu $\mathbf{A}$ un paplašināto matricu $\mathbf{L} = [\mathbf{A}|\mathbf{b}]$. Ar REP pārveidosim matricu Ermita formā

$$\mathbf{RL} = [\mathbf{RA}|\mathbf{Rb}],$$

kur $\mathbf{RA}$ arī ir Ermita matrica.

LVS ir saderīga $\iff$ paplašinātās matricas pēdējā kolonnā nav galvenās rūtiņas $\iff$ $rr(\mathbf{L}) = rr(\mathbf{A})$. ■

2.2. Matricas kolonnu rangs

2.2.1. Matricas kolonnu pakāpienveida un kolonnu Ermita formas

Var definēt matricu

- *kolonnu pakāpienveida* formu un
- *kolonnu Ermita* formu,

uz kurām matricu var pārveidot veicot tikai KEP. Atšķirība no rindu pakāpienveida formas algoritma - tiek mainīti vietām rindu un kolonnu indeksi.

2.2. piezīme. KEP ar $\mathbf{A}$ ir tas pats, kas REP ar $\mathbf{A}^T$. Attiecīgi mainās arī pakāpienveida un Ermita formas.

2.1. piemērs. $\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -3 & 1 \\ \hline 4 & -12 & 4 \\ \hline -3 & 10 & -1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 1 & 0 \end{array}\right].$

KEP virkne: $K_{12}(3)$, $K_{13}(-1)$, $K_{23}(-2)$.

KEP gadījumā ir spēkā tādi paši rezultāti kā REP gadījumā:

- $\forall$ matricu var pārveidot kolonnu pakāpienveida formā,
- matricas $\mathbf{A}$ kolonnu Ermita forma $\mathcal{H}_K(\mathbf{A})$ ir noteikta viennozīmīgi,

- galveno rūtiņu skaits un adreses ir noteiktas viennozīmīgi (neatkarīgi no KEP izvēles).

2.2.2. Definīcija un īpašības

Par matricas $\mathbf{A}$ *kolonnu rangu* $rk(\boldsymbol{A})$ sauc galveno rūtiņu skaitu jebkurā kolonnu pakāpienveida formā.

Tāpat kā REP gadījumā var pierādīt, ka KEP saglabā kolonnu rangu.

2.2. piemērs. $rr(\mathbf{E}_n) = rk(\mathbf{E}_n)$. Normālai matricai $rr = rk$.

2.3. Matricas rangs

2.3.1. Rindu un kolonnu rangu vienādība

2.5. teorēma. $\forall$ REP un KEP saglabā rindu un kolonnu rangus.

PIERĀDĪJUMS. Pietiek pierādīt, ka KEP saglabā rindu rangu.

Salīdzināsim rindu rangus matricām $\mathbf{A}$ un $\mathbf{AK}$, kur $\mathbf{K}$ ir KEP matrica.

Pārveidosim $\mathbf{A}$ pakāpienveida formā ar REP, iegūsim pakāpienveida matricu $\mathbf{B} = \mathbf{RA}$.

Tā kā REP nemaina rindu rangu, pietiek salīdzināt rindu rangus matricām $\mathbf{B}$ un $\mathbf{BK}$.

Ar KEP nevar iegūt papildus nenulles rindas $\Longrightarrow$

$$rr(\mathbf{B}) \geq rr(\mathbf{BK}).$$

Citiem vārdiem sakot, KEP nepalielina rindu rangu.

$\forall$ KEP ir invertējami $\Longrightarrow$ $\exists\, \mathbf{K}^{-1}$: $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{KK}^{-1}) = (\mathbf{BK})\mathbf{K}^{-1}$ $\Longrightarrow$ $rr(\mathbf{BK}) \geq rr(\mathbf{BKK}^{-1}) = rr(\mathbf{B})$.

Seko, ka $rr(\mathbf{B}) = rr(\mathbf{BK})$. ■

2.6. teorēma.

1. $\forall\ \mathbf{A}\ rr(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A})$.
2. Ar REP un KEP matricu var pārveidot uz viennozīmīgi noteiktu normālo formu (matricas normālā forma ir noteikta viennozīmīgi).

PIERĀDĪJUMS.

1. Ar REP un KEP $\mathbf{A}$ var pārveidot normālajā formā, kurā abi rangi sakrīt.

2. REP un KEP saglabā abus rangus $\Longrightarrow$ jebkurām divām dotās matricas normālajām formām ir vienāds rangs $\Longrightarrow$ tās sakrīt. ■

Matricas $\mathbf{A}$ normālo formu apzīmēsim ar $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

2.3.2. Matricas rangs un tā īpašības

Par matricas $\mathbf{A}$ *rangu* $r(\mathbf{A})$ sauc $rr(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A})$.

Lai atrastu matricas rangu, pietiek atrast tās rindu vai kolonnu rangu ņemot vērā šādus faktus:

- visi elementārie pārveidojumi saglabā rangu;
- rangs ir vienāds ar galveno rūtiņu skaitu jebkurā no šādam matricas formām:
  - rindu vai kolonnu pakāpienveida formā,
  - rindu vai kolonnu Ermita formā,
  - normālajā formā;
- matricu formas, kurās tiek skaitītas galvenās rūtiņas, var būt arī ne obligāti normalizētas.

Divas vienāda izmēra matricas sauc par ekvivalentām, ja tām ir

- vienāds rangs vai
- vienāda normālā forma.

2.7. teorēma.

1. $\mathbf{A}$ - $m \times n$ matrica $\Longrightarrow$ $r(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.

2. $r(\lambda \mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$, ja $\lambda \neq 0$.

3. $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T)$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\begin{cases} r(\mathbf{A}) = rr(\mathbf{A}) \leq m \\ r(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) \leq n \end{cases} \Longrightarrow r(\mathbf{A}) \leq \min(m, n).$

2. $\mathbf{A}$ un $\lambda\mathbf{A}$ var pārveidot pakāpienveida formā ar vienu un to pašu REP virkni.

3. $r(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) = rr(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A}^T)$. $\blacksquare$

3. 8.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

8.1 Pārveidot matricas normālajā formā. Atrast REP un KEP matricas.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

8.2 Pārveidot matricas kolonnu pakāpienveida un kolonnu Ermita formā.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

8.3 Atrast matricu rangus.

(a) $\begin{bmatrix} -12 & 4 & 8 & 8 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

8.4 Atrast matricu rangus atkarībā no parametriem.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 2 & -2 & \beta \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & 1 \end{bmatrix}$.

8.5 Atrisināt matricu vienādojumu $\mathbf{AX} = \mathbf{E}_2$, kur

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(*Norādījums: atrodiet LVS, kas ir ekvivalenta matricu vienādojumam*)

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

8.6 Pierādīt nevienādības

(a) $r(\mathbf{AB}) \leq \min\Big(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\Big)$;

(b) $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$;

(c) $r([\mathbf{A}|\mathbf{B}]) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$.

8.7 Pierādīt, ka $\forall$ $m \times n$ matricu $\mathbf{A}: \ r(\mathbf{A}) = 1$, var izteikt formā $\mathbf{A} = \mathbf{KR}$, kur $\mathbf{K}$ ir $m \times 1$ matrica (kolonna), $\mathbf{R}$ ir $1 \times n$ matrica (rinda). Atrast $\mathbf{K}$ un $\mathbf{R}$, ja ir dota $\mathbf{A}$.

8.8 Atrast rangu matricai

$$\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & ... & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & ... & a_2b_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_nb_1 & a_nb_2 & ... & a_nb_n \end{bmatrix}.$$

8.9 Telpā ir dotas 4 taisnes. Vai vienmēr eksistē kāda taisne, kas krusto visas 4 dotās taisnes.