DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

6.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

1. Lineāru vienādojumu sistēmas **5**

1.1. Ievads 5

1.1.1. Definīcijas un apzīmējumi 5

1.1.2. Praktiski motivējoši piemēri 6

1.2. LVS pieraksta veidi 7

1.2.1. LVS vispārīgais pieraksts 7

1.2.2. LVS matricu pieraksts 9

1.2.3. LVS paplašinātās matricas pieraksts 10

1.2.4. LVS kolonnu pieraksts (kolonnu aina) 12

1.3. LVS atrisinājumi 13

2. LVS elementārie pārveidojumi **15**

2.1. 1.veida elementārie pārveidojumi 16

2.2. 2.veida elementārie pārveidojumi 17

2.3. 3.veida elementārie pārveidojumi 19

2.4. Citi LVS pārveidojumi 21

2.4.1. Triviālo vienādojumu ignorēšana 21

2.4.2. Elementāro pārveidojumu īpašības un realizācija ar matricu reizināšanu 21
2.5. Elementāro pārveidojumu virknes 25

3. 6.mājasdarbs **27**
3.1. Obligātie uzdevumi 27
3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi 30

Lekcijas mērķis:

- apgūt lineāro vienādojumu sistēmu (LVS) pamatfaktus,
- apgūt LVS vienkāršošanas pārveidojumus - *elementāros pārveidojumus*,
- apgūt matricu algebras pielietošanu LVS vienkāršošanā.

Lekcijas kopsavilkums:

- LVS var uzdot vairākos veidos,
- var definēt trīs veidu pārveidojumus, kas maina LVS datus, nemainot to atrisinājumu kopas,

- LVS elementāros pārveidojumus var uzdot ar matricu reizināšanas palīdzību.

Svarīgākie jēdzieni: lineārs vienādojums, LVS, LVS vispārīgais, matricu un kolonnu pieraksti, LVS atrisinājumu kopa, LVS elementārie pārveidojumi, LVS elementāro pārveidojumu matricas,

Svarīgākie fakti un metodes: elementāro pārveidojumu īpašības un to realizācija ar matricu reizināšanu, elementāro pārveidojumu virkņu īpašības.

1. Lineāru vienādojumu sistēmas

1.1. Ievads

1.1.1. Definīcijas un apzīmējumi

k - lauks (piemēram, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_2$). Par *lineāru vienādojumu* attiecībā uz *nezināmajiem* $X_1, X_2, ..., X_n$ laukā k sauc vienādojumu

$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n + a_0 = 0$$

vai

$$a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n = b, \text{ kur } a_1, ..., a_n, a_0, b \in k.$$

$\exists\ a_p \neq 0 \implies$

$$X_p = \frac{1}{a_p}\Big(b - a_1X_1 - ... - a_{p-1}X_{p-1} - a_{p+1}X_{p+1} - ... - a_nX_n\Big).$$

Nezināmo $X_1, ..., X_{p-1}, X_{p+1}, ..., X_n$ vērtības var izvēlēties patvaļīgi.

1.1. piemērs.

Vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n = b_1 \\ ... \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mn}X_n = b_m \end{cases}$$

sauc par *lineāru vienādojumu sistēmu (LVS).*

1.2. piemērs. $$\begin{cases} X_1+ & X_2+ & X_3 & = 0 \\ X_1+ & 2X_2 & & = 3 \\ & -X_2+ & 4X_3 & = 2 \end{cases}$$

1.1.2. Praktiski motivējoši piemēri

Plūsmas Ja ir dots transporta tīkls ar vairākiem mezgliem, kuros plūsma neuzkrājas, tad var sastādīt LVS, kurā katrs vienādojums atbilst plūsmas kustībai caur vienu mezglu.

1.3. piemērs.

Elektriskās ķēdes Ja ir dota elektriska ķēde ar pretestībām, tad var sastādīt LVS izmantojot Kirhofa likumus:

- katrā mezglā strāvu algebriskā summa ir vienāda ar 0 (lādiņš nekur neuzkrājas),
- katrā kontūrā spriegumu kritumu summa ir vienāda ar 0.

1.4. piemērs.

1.2. LVS pieraksta veidi

1.2.1. LVS vispārīgais pieraksts

Par LVS *vispārīgo pierakstu* sauc sistēmu

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n = b_1 \\ ... \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mn}X_n = b_m, \end{cases}$$

kur

- X_j - *nezināmie,*
- a_{ij} - *koeficienti,*
- b_i - *brīvie locekļi.*

Ja b_i, $\forall\ i$, tad LVS sauc par *homogēnu LVS.*

Ja $n = m$, tad LVS sauc par *kvadrātveida LVS.*

Ja nezināmo skaits ir neliels (ne vairāk kā 5), tad tos var apzīmēt burtiem bez indeksiem - X,Y,Z u.c., kurus matemātikā tradicionāli izmanto nezināmo lielumu apzīmēšanai.

1.2.2. LVS matricu pieraksts

$\forall$ LVS sistēmai

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n = b_1 \\ ... \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mn}X_n = b_m \end{cases}$$

definēsim 3 matricas:

- *sistēmas matrica* ir $m \times n$ matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix},$$

- *nezināmo kolonnas matrica*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ ... \\ X_n \end{bmatrix},$$

- *brīvo locekļu kolonnas matrica*

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

LVS ir līdzvērtīga *LVS matricu vienādojumam*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

1.1. piezīme. Retāk izmanto līdzvērtīgo matricu vienādojumu

$$(\mathbf{Ax})^T = \boxed{\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{b}^T},$$

kurā nezināmie un brīvie locekļi ir rindu matricas.

1.2.3. LVS paplašinātās matricas pieraksts

LVS L

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n = b_m \end{cases}$$

paplašinātā matrica $\mathbf{L}$ ir $m \times (n+1)$ matrica

$$\mathbf{L} = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right] = [\mathbf{A}|\mathbf{b}].$$

Paplašinātās matricas pieraksts ir matricu pieraksta variants, kas dažās situācijās ir ērtāks.

1.5. piemērs. Sistēmai

$$\begin{cases} X_1 + & X_2 + & X_3 & = 0 \\ X_1 + & 2X_2 & & = 3 \\ & -X_2 + & 4X_3 & = 2 \end{cases}$$

atbilst paplašinātā matrica $\mathbf{L} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{array}\right]$.

1.2.4. LVS kolonnu pieraksts (kolonnu aina)

Par LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *kolonnu pierakstu* sauc matricu vienādību

$$X_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + X_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + X_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

1.6. piemērs. Sistēmai

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + 2X_2 = 3 \\ -X_2 + 4X_3 = -2 \end{cases}$$

atbilst kolonnu pieraksts

$$X_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + X_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + X_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

1.3. LVS atrisinājumi

Par LVS

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n = 0 \\ ... \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mn}X_n = 0 \end{cases}$$

atrisinājumu sauksim skaitļu (lauka elementu) virkni $(x_1^0, ..., x_n^0)$ tādu, ka, ievietojot X_i vietā x_i^0, $\forall\, i$, katra sistēmas vienādojuma vietā iegūst skaitļu (lauka elementu) vienādību.

Atrisināt LVS nozīmē atrast tās *atrisinājumu kopu* - atrast visus atrisinājumus.

LVS sauksim par *saderīgu*, ja tai eksistē vismaz viens atrisinājums - atrisinājumu kopa nav tukša.

1.7. piemērs. Homogēna LVS vienmēr ir saderīga - tai ir *triviālais atrisinājums* $(0, ..., 0)$.

Sistēmai $\begin{cases} X+Y=1 \\ X-Y=1 \end{cases}$ atrisinājumu kopa satur vienu skaitļu pāri $(1,0)$.

Sistēmai $\begin{cases} X+Y=1 \\ X+Y=0 \end{cases}$ atrisinājumu kopa ir tukša - nekāds skaitļu pāris (x^0,y^0) neapmierina šo sistēmu.

Sistēmai $\begin{cases} X+Y=1 \\ 2X+2Y=2 \end{cases}$ atrisinājumu kopa ir bezgalīga - visi skaitļu pāri formā $(c,1-c)$, kur $c\in\mathbb{R}$, apmierina šo sistēmu.

Divas LVS sauc par ekvivalentām, ja to atrisinājumu kopas ir vienādas (tās var būt arī tukšas).

1.8. piemērs. Sistēmas $\begin{cases} X+Y=1 \\ X-Y=1 \end{cases}$ un $\begin{cases} X+Y=1 \\ 2X=2 \end{cases}$ ir ekvivalenta - tām abām atrisinājumu kopa ir skaitļu pāris $(1,0)$.

LVS pētīšanas pamatuzdevums - LVS risināšana.

Viena no LVS risināšanas metodēm - pārveidot doto LVS uz ērtāku ekvivalentu sistēmu, veicot vienkāršus soļus, piemēram, *nezināmo izslēgšanu*, kas nemaina atrisinājumu kopu.

2. LVS elementārie pārveidojumi

Aprakstīsim vairāku tipu LVS *elementāros pārveidojumus (EP)*, kas nemaina LVS atrisinājumu kopu.

LVS elementārajiem pārveidojumiem piekārtosim matricu *rindu elementāros pārveidojumus (REP)*.

2.1. 1.veida elementārie pārveidojumi

LVS *1.veida EP* R_{pq} - p-tā un q-tā vienādojuma apmaiņa:

$$\begin{cases} ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \\ a_{q1}X_1 + ... + a_{qn}X_n = b_q \\ ... \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ... \\ a_{q1}X_1 + ... + a_{qn}X_n = b_q \\ ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \end{cases}$$

Šāda pārveidojuma rezultātā mainās abi vienādojumi.

Paplašinātās matricas pierakstā vai matricu vienādojumā 1.veida EP nozīmē divu matricas rindu apmaiņu.

2.1. piemērs.

Par 1.veida EP R_{pq} *elementāro matricu* sauc matricu, ko iegūst, pielietojot R_{pq} vienības matricai $\mathbf{E}_m$:

$$\mathbf{R}_{pq} = \mathbf{E}_m - \mathbf{E}_{pp} - \mathbf{E}_{qq} + \mathbf{E}_{pq} + \mathbf{E}_{qp}.$$

2.2. piemērs. $\mathbf{R}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pārbaudīt, ka reizināšana ar $\mathbf{R}_{12}$ ir 1.veida EP R_{12}.

3. Pielietojot vienu un to pašu 1.veida EP divas reizes, iegūsim sākotnējo LVS. Var pārbaudīt arī, ka $\mathbf{R}_{pq}^2 = \mathbf{E}_m$. ■

2.1. piezīme. $\mathbf{R}_{pq}[\mathbf{A}|\mathbf{B}] = [\mathbf{R}_{pq}\mathbf{A}|\mathbf{R}_{pq}\mathbf{B}] \Longrightarrow$ matricu vienādojums pārveidojas par $(\mathbf{R}_{pq}\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{R}_{pq}\mathbf{B}$.

2.2. 2.veida elementārie pārveidojumi

LVS *2.veida EP* $R_p(\lambda)$, $\lambda \neq 0$ - p-tā vienādojuma koeficientu reizināšana ar λ:

$$\begin{cases} ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \end{cases} \to \begin{cases} ... \\ (\lambda a_{p1})X_1 + ... + (\lambda a_{pn})X_n = \lambda b_p \\ ... \end{cases}$$

Šāda pārveidojuma rezultātā mainās p-tais vienādojums.

Paplašinātajā matricā vai matricu vienādojumā 2.veida EP nozīmē visu p-tās rindas elementu reizināšanu ar λ.

2.3. piemērs.

Par 2.veida EP $R_p(\lambda)$ *elementāro matricu* sauksim matricu, ko iegūst, pielietojot $R_p(\lambda)$ vienības matricai $\mathbf{E}_m$:

$$\mathbf{R}_p(\lambda) = \mathbf{E}_m + (\lambda - 1)\mathbf{E}_{pp}.$$

2.4. piemērs. $\mathbf{R}_2(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pārbaudīt, ka reizināšana ar $\mathbf{R}_2(-3)$ ir $R_2(-3)$.

2.3. 3.veida elementārie pārveidojumi

LVS *3.veida EP* $R_{pq}(\lambda)$ - p-tā vienādojuma, reizināta ar λ, pieskaitīšana q-tajam vienādojumam:

$$\begin{cases} ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \\ a_{q1}X_1 + ... + a_{qn}X_n = b_q \\ ... \end{cases} \quad \to$$

$$\begin{cases} ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \\ (a_{q1} + \lambda a_{p1})X_1 + ... + (a_{qn} + \lambda a_{pn})X_n = b_q + \lambda b_p \\ ... \end{cases}$$

Šāda pārveidojuma rezultātā mainās q-tais vienādojums.

Paplašinātās matricas un matricu pierakstā 3.veida EP nozīmē

p-tās rindas elementu reizināšanu ar fiksētu skaitli un rezultāta pieskaitīšana q-tajai rindai.

2.5. piemērs.

Par 3.veida EP $R_{pq}(\lambda)$ *elementāro matricu* sauksim matricu, ko iegūst, pielietojot $R_{pq}(\lambda)$ vienības matricai $\mathbf{E}_m$:

$$\mathbf{R}_{pq}(\lambda) = \mathbf{E}_m + \lambda \mathbf{E}_{qp}.$$

2.6. piemērs. $\mathbf{R}_{12}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pārbaudīt, ka reizināšana ar $\mathbf{R}_{12}(-3)$ ir 3.veida EP $R_{12}(-3)$.

2.4. Citi LVS pārveidojumi

2.4.1. Triviālo vienādojumu ignorēšana

Vienādojumu $0 \cdot X_1 + ... + 0 \cdot X_n = 0$, kuram atbilst paplašinātās matricas nuļļu rinda [0...0], sauksim par *triviālu vienādojumu.*

Triviālos vienādojumus var ignorēt.

2.4.2. Elementāro pārveidojumu īpašības un realizācija ar matricu reizināšanu

2.1. teorēma.

1. $\forall$ EP R saglabā LVS atrisinājumu kopu.
2. EP R atbilst paplašināto matricu pārveidojumam

$$\mathbf{L} \to \mathbf{RL}.$$

3. $\forall$ R ir invertējami:

$$\begin{cases} R_{pq} = R_{pq} \\ R_p(\lambda) = R_p(\lambda^{-1}) \\ R_{pq}(\lambda)^{-1} = R_{pq}(-\lambda). \end{cases}$$

PIERĀDĪJUMS

1. R_{pq} nemaina LVS atrisinājumu kopu, jo LVS vienādojumi nemainās. Mainās tikai to kārtība sistēmā.

$R_p(\lambda)$ nemaina LVS atrisinājumu kopu, jo viens LVS vienādojums tiek reizināts ar $\lambda \neq 0$.

Apskatīsim $R_{pq}(\lambda)$. Ja skaitļi virkne $(x_1^0, ..., x_n^0)$ apmierina sistēmu

$$\begin{cases} ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \\ a_{q1}X_1 + ... + a_{qn}X_n = b_q \\ ... \end{cases}$$

tad

$$(a_{q1} + \lambda a_{p1})x_1^0 + ... + (a_{qn} + \lambda a_{pn})x_n^0 = b_q + \lambda b_p,$$

tātad $(x_1^0, ..., x_n^0)$ apmierina arī sistēmu

$$\begin{cases} ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \\ (a_{q1} + \lambda a_{p1})X_1 + ... + (a_{qn} + \lambda a_{pn})X_n = b_q + \lambda b_p \\ ... \end{cases}$$

Ja skaitļi virkne $(x_1^0, ..., x_n^0)$ apmierina sistēmu

$$\begin{cases} ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \\ (a_{q1} + \lambda a_{p1})X_1 + ... + (a_{qn} + \lambda a_{pn})X_n = b_q + \lambda b_p \\ ... \end{cases}$$

tad tā apmierina arī sistēmu, ko iegūst, veicot $R_{pq}(-\lambda)$ -

$$\begin{cases} ... \\ a_{p1}X_1 + ... + a_{pn}X_n = b_p \\ ... \\ a_{q1}X_1 + ... + a_{qn}X_n = b_q \\ ... \end{cases}$$

2. Ar tiešu pārbaudi $\forall$ R pārliecināsimies, ka pārveidotās LVS paplašinātā matrica ir **RL**.

Apskatīsim tikai 3.veida pārveidojumu $R_{pq}(\lambda)$:

$$\mathbf{R}_{pq}(\lambda)\mathbf{L} = (\mathbf{E}_m + \lambda\mathbf{E}_{qp})\mathbf{L} = \mathbf{E}_m\mathbf{L} + \lambda\mathbf{E}_{qp}\mathbf{L} =$$

$$\mathbf{L} + \lambda\mathbf{E}_{qp}\mathbf{L} = \mathbf{L} + \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0}... \\ \mathbf{r}_p(j\text{-tā rinda}) \\ \mathbf{0}... \end{bmatrix}$$

3. Pielietojot R_{pq} divas reizes, iegūsim sākotnējo LVS.

Pielietojot EP virkni $R_p(\lambda) \to R_p(\lambda^{-1})$ iegūsim sākotnējo LVS.

Pielietojot EP virkni $R_{pq}(\lambda) \to R_{pq}(-\lambda)$ iegūsim sākotnējo LVS.
■

2.5. Elementāro pārveidojumu virknes

2.2. teorēma. Ja LVS $\mathbf{L}_2$ ir iegūta no LVS $\mathbf{L}_1$ pielietojot galīgu EP virkni $P_1, ..., P_k$, tad

1. $\mathbf{L}_1$ un $\mathbf{L}_2$ ir ekvivalentas,
2. $\mathbf{L}_2 = \mathbf{P}_k \cdot ... \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{L}_1$.
3. Matrica $\mathbf{P}_k \cdot ... \cdot \mathbf{P}_1$ ir vienāda ar EP virknes $P_1, ..., P_k$ pielietošanu vienības matricai.

PIERĀDĪJUMS

1. $\forall$ EP saglabā LVS atrisinājumu kopu $\Longrightarrow$ veicot pēctecīgi vairākus EP, atrisinājumu kopa arī tiks saglabāta.

2. Katrs nākamais EP P_i tiek pielietots iepriekšējo pārveidojumu kompozīcijai $\mathbf{P}_{i-1} \cdot ... \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{L}_1$, tāpēc pēc tā pielietošanas tiks iegūta matrica

$$\mathbf{P}_i \cdot (\mathbf{P}_{i-1} ... \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{L}_1) = \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_{i-1} ... \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{L}_1.$$

Pieņemot $i = k$ iegūsim pierādāmo apgalvojumu.

3. $\mathbf{P}_k \cdot ... \cdot \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_k \cdot ... \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{E}$. ■

2.2. piezīme. $\mathbf{P}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = [\mathbf{PA}|\mathbf{Pb}] \implies$ ja LVS ir uzdota matricu veidā $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, tad EP matricas reizina abās pusēs:

$$\Big(\mathbf{Ax} = \mathbf{b}\Big) \rightarrow \Big((\mathbf{PA})\mathbf{x} = \mathbf{Pb}\Big).$$

3. 6.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

6.1 Aprakstiet LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ja tās sistēmas matrica $\mathbf{A}$ ir

(a) rindas matrica,
(b) kolonnas matrica,
(c) kvadrātveida matrica,
(d) nulles matrica,
(e) vienības matrica,
(f) diagonāla matrica,
(g) augšēji trijstūrveida matrica.

6.2 Dotajām LVS un elementāro pārveidojumu virknēm atrast pārveidoto paplašināto matricu, pārveidoto sistēmu un pārveidojuma matricu.

(a) LVS:

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 - 2X_3 - 7X_4 = -8 \\ 3X_1 + 6X_2 - 4X_3 - 11X_4 = -12 \\ -2X_1 - 4X_2 + 3X_3 + 9X_4 = 13. \end{cases}$$

EP virkne: $R_{12}(-3)$, $R_{13}(2)$, $R_2(1/2)$, $R_{23}(1)$, $R_3(1/3)$, $R_{21}(2)$ (sākot no kreisās puses).

(b) LVS:

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 - 5X_4 = 3 \\ 2X_1 + 4X_2 - 3X_3 - 16X_4 = -6 \\ 3X_1 + 4X_2 - 2X_3 - 13X_4 = -3. \end{cases}$$

EP virkne: $R_{12}(-2)$, $R_{13}(-3)$, R_{23}, $R_2(-1/2)$, $R_3(-1/3)$, $R_{21}(-2)$, $R_{32}(-1)$, $R_{31}(2)$.

6.3 Aprakstīt LVS rindu pārveidojumus, kas atbilst paplašinātās matricas reizināšanai no kreisās puses ar dotajām matricām.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$

6.4 Izmantojot elementāros pārveidojumus pārveidot LVS

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 + X_3 = 3 \\ 3X_2 + 4X_3 = -1 \\ X_1 + X_2 - 5X_3 = 0 \end{cases}$$

par LVS, kuras sistēmas matrica ir

(a) augšēji trijstūrveida matrica,
(b) vienības matrica.

6.5 Pamatojiet, kāpēc 5.4 uzdevumā dotā LVS nav ekvivalenta LVS

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 + X_3 = 3 \\ 3X_2 + 4X_3 = -1. \end{cases}$$

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

6.6 Interpretēt triviālo vienādojumu izsvītrošanu un seku vienādojumu pievienošanu izmantojot matricu reizināšanu.

6.7 Vairāku vienādojumu lineāru kombināciju sauc par *seku vienādojumu.* Seku vienādojumus ir vairāku 2. un 3. veida pārveidojumu rezultāts. Pierādīt, ka LVS var pievienot jebkuru seku vienādojumu neizmainot atrisinājumu kopu. Realizēt seku vienādojumu pievienošanu izmantojot matricu reizināšanu.