DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

5.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt matricu algebras pamatus

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt tabulas - matricas un to speciālgadījumus,
- matricu kopās var definēt vairākas operācijas, kas vispārina skaitļu aritmētiskās operācijas.

Svarīgākie jēdzieni: matrica, matricas elements, rinda, kolonna, galvenā diagonāle, rindas/kolonnas matrica, kvadrātveida matrica, nulles matrica, bāzes matrica, vienības matrica, diagonāla matrica, trijstūrveida matrica, simetriska/antisimetriska matrica, bloku matrica, rindu/kolonnu izsvītrošana, rindu/kolonnu mainīšana vietām, rindas/kolonnas reizināšana ar skaitli, rindas/kolonnas pieskaitīšana citai rindai/kolonnai, transponēšana, matricu summa, matricas reizināšana ar skaitli, matricu lineāra kombinācija, matricu reizināšana, invertējama matrica.

Svarīgākie fakti un metodes: matricu operāciju īpašības.

1. Ievads matricu algebrā

1.1. Pamatfakti

1.1.1. Definīcijas un apzīmējumi

Daudzās zinātnēs un situācijās informācija tiek glabāta skaitļu tabulu formā.

Par *matricu* sauksim galīgu taisnstūrveida tabulu, kuras rūtiņās ir ierakstīti skaitļi vai citu gredzenu elementi - *matricas elementi*.

1.1. piemērs. $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & a \\ -3 & b & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Matricas elementus, kas atrodas vienā rindā vai kolonnā (ailē), sauc par *matricas rindu* vai *kolonnnu*.

Matricu ar m rindām un n kolonnām sauc par $m \times n$ matricu.

Ja $m = 0$ vai $n = 0$, tad matricu sauc par *tukšu.*

Divas matricas sauksim par vienādām, ja tām

1. sakrīt rindu un kolonnu skaits,
2. katrā rūtiņā matricu elementi ir vienādi.

1.2. piemērs. 2×2 matrica - $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Matricu rindas, kolonnas un elementus indeksē (piešķir adreses) sākot no augšējā kreisā stūra.

Vispārīga $m \times n$ matrica tiek apzīmēta šādi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m,n}.$$

Elements a_{ij} atrodas i-tajā rindā un j-tajā kolonnā.

Visu $m \times n$ matricu kopu, kuru elementi pieder kopai R, apzīmēsim ar $Mat(m, n, R)$.

Matricu var uzskatīt arī par tās rindu vai kolonnu apvienojumu:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{array}\right].$$

Par matricas *galveno diagonāli* sauc diagonāli, kas sākas ar matricas augšējo kreiso stūri. Tādējādi matricas $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ galvenā diagonāle ir elementu kopa $\{a_{11}, a_{22}, ..., a_{ii}, ...\}$.

1.1.2. Speciāla veida matricas

Rindas matrica - $1 \times n$ matrica.

1.3. piemērs. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Kolonnas matrica - $m \times 1$ matrica.

1.4. piemērs. $\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Jebkurš skaitlis var tikt uzskatīts par 1×1 matricu.

Kvadrātveida matrica - matrica, kuras rindu skaits ir vienāds ar kolonnu skaitu - matricas *izmēru.*

Visu kvadrātveida $n \times n$ matricu kopu ar elementiem gredzenā R apzīmēsim ar $Mat(n, R)$.

Nulles matrica $\mathbf{0}$ vai $\mathbf{O}_{m,n} = [0]_{m,n}$.

Bāzes matrica $\boldsymbol{E}_{ij}$ - matrica, kuras visi elementi, izņemot elementu ar koordinātēm (i, j), ir vienādi ar 0 un elements ar koordinātēm (i, j) ir vienāds ar 1. Tādējādi $m \times n$ bāzes matricu skaits ir mn.

1.5. piemērs. $\mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Vienības matrica $\boldsymbol{E}_n$ - $n \times n$ matrica, kuras elementi uz galvenās diagonāles ir vienādi ar 1 un visi pārējie elementi ir vienādi ar 0:

$$\mathbf{E}_n = [\delta_{ij}]_{n,n}, \text{ kur } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ja } i = j, \\ 0, \text{ ja } i \neq j. \end{cases}$$

1.6. piemērs. $\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$.

Diagonāla matrica - kvadrātveida matrica, kuras elementi ārpus galvenās diagonāles ir vienādi ar 0.

1.7. piemērs. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Augšēji (apakšēji) trijstūrveida matricu - matrica, kuras visi elementi zem (virs) galvenās diagonāles ir vienādi ar 0.

1.8. piemērs. Augšēji trijstūrveida matrica - $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Simetriska matrica - kvadrātveida matrica $\mathbf{A}$, kurai visiem indeksu pāriem (i, j) izpildās sakarība $a_{ij} = a_{ji}$.

1.9. piemērs. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Antisimetriska matrica - kvadrātveida matrica $\mathbf{A}$, kurai visiem indeksu pāriem (i, j) izpildās sakarība $a_{ij} = -a_{ji}$.

1.10. piemērs. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Nereti ir lietderīgi ar horizontālām un vertikālām atdalošām līnijām sadalīt matricu apakšmatricās - *blokos* un uzskatīt matricu par *bloku matricu*:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array}\right].$$

Speciālgadījums - matricas rindu un kolonnu reprezentācija:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \hline ... \\ \hline \mathbf{r}_m \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{k}_1 & ... & \mathbf{k}_n \end{array}\right].$$

1.2. Matricu operācijas

1.2.1. Rindu un kolonnu operācijas

Rindu un kolonnu izsvītrošana.

Dota matrica $\mathbf{A}$, tās rindu indeksu kopa I un kolonnu indeksu kopa J. $\mathbf{A}(I,J)$ apzīmē matricu, ko iegūst, pēctecīgi izsvītrojot no $\mathbf{A}$ rindas ar indeksiem no I un kolonnas ar indeksiem no J un "sabīdot kopā" atlikušos matricas elementus.

1.11. piemērs. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}(\{1\},\{2\}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Rindu (kolonnu) mainīšana vietām.

Dota matrica $\mathbf{A}$, divi indeksi p, q. $R_{pq}(\mathbf{A})$ ($K_{pq}(\mathbf{A})$) - matrica, ko iegūst, apmainot vietām dotās rindas (kolonnas).

1.12. piemērs. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $R_{12}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Rindas (kolonnas) elementu reizināšana ar fiksētu skaitli.

Dota matrica $\mathbf{A}$, indekss p un skaitlis λ. $R_p(\lambda)(\mathbf{A})$ ($K_p(\lambda)(\mathbf{A})$) - matrica, ko iegūst, reizinot $\mathbf{A}$ p-to rindu (kolonnu) ar λ.

1.13. piemērs. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $R_1(-2)(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Rindai pieskaitīt citu rindu reizinātu ar kādu skaitli.

Dota matrica $\mathbf{A}$, divi dažādi indeksi p, q un skaitlis λ. $R_{pq}(\lambda)(\mathbf{A})$ - matrica, ko iegūst no $\mathbf{A}$, pieskaitot rindai ar indeksu q rindu ar indeksu p, reizinātu ar λ.

1.14. piemērs. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$,

$$R_{2,1}(-2)(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1+(-2)\cdot 2 & 3+(-2)\cdot(-1) & 1+(-2)\cdot 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kolonnai pieskaitīt citu kolonnu reizinātu ar skaitli.

Dota matrica $\mathbf{A}$, divi dažādi indeksi p, q un skaitlis λ. $K_{p,q}(\lambda)(\mathbf{A})$ - matrica, ko iegūst no $\mathbf{A}$, pieskaitot kolonnai ar indeksu q kolonnu ar indeksu p, reizinātu ar λ.

1.15. piemērs. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$,

$$K_{2,1}(-2)(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1+(-2)\cdot 3 & 3 & 1 \\ 2+(-2)\cdot(-1) & -1 & 0 \\ 3+(-2)\cdot 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.2.2. Matricu apvienošana

Atbilstošu izmēru matricas var apvienot bloku matricās.

1.16. piemērs. $\mathbf{A}$ - $m \times n$ matrica, $\mathbf{b}$ - $m \times 1$ matrica. Apvienosim tās $m \times (n+1)$ matricā $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$.

1.2.3. Transponēšana

Dažās situācijās ir lietderīgi apskatīt matricas simetriju attiecībā uz galveno diagonāli.

Par $m \times n$ matricas $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ *transponēto matricu* sauc $n \times m$ matricu $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]_{n,m}$.

1.17. piemērs. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

1.1. piezīme. Matrica $\mathbf{A}$ ir simetriska (antisimetriska) $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T)$.

1.2. piezīme. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

1.2.4. Lineārās operācijas

Vienādu izmēru matricu kopā var definēt operācijas, kas vispārina skaitļu saskaitīšanu.

Matricu summa

Par divu vienāda izmēra matricu $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ un $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m,n}$ summu sauksim matricu

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m,n}.$$

Citiem vārdiem sakot, saskaitot divas vienāda izmēra matricas, tiek saskaitīti elementi, kuriem ir vienādas adreses:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matricas reizināšana ar skaitli

Par matricas $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ reizinājumu ar skaitli λ sauksim matricu

$$\lambda\mathbf{A} = [\lambda a_{ij}]_{m,n}.$$

Citiem vārdiem sakot, reizinot matricu ar kādu skaitli, visi tās elementi tiek reizināti ar šo skaitli:

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matricu $(-1)\mathbf{A}$ parasti apzīmē ar $-\mathbf{A}$.

1.18. piemērs. $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \\ 12 & 12 & -6 \end{bmatrix}.$$

Matricu lineāra kombinācija

Ja ir dotas vairākas vienāda izmēra matricas $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, ..., \mathbf{A}_l$ un skaitļi $\lambda_1, ..., \lambda_l$ (*koeficienti*), tad izteiksmi

$$\lambda_1 \mathbf{A}_1 + ... + \lambda_l \mathbf{A}_l = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \mathbf{A}_i$$

sauksim par doto matricu *lineāru kombināciju.*

Lineāro kombināciju $1 \cdot \mathbf{A} + (-1) \cdot \mathbf{B}$ apzīmē ar $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ un sauc par matricu starpību.

1.19. piemērs. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$,

$2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 8 \\ 9 & 1 & -5 \end{bmatrix}$.

Katra matrica $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ ir viennozīmīgi izsakāma formā

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1,j=1}^{m,n} a_{ij}\mathbf{E}_{ij}.$$

1.1. teorēma.

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (komutativitāte).
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ (asociativitāte).
3. $\forall\ \mathbf{A}\ \exists$ viennozīmīgi noteikta matrica $\mathbf{Z} : \mathbf{A} + \mathbf{Z} = \mathbf{A}$.
4. $\forall\ \mathbf{A}\ \exists$ viennozīmīgi noteikta matrica $\mathbf{A}' : \mathbf{A} + \mathbf{A}' = \mathbf{O}$.
5. $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$.
6. $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$.
7. $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda(\mu\mathbf{A})$.
8. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.
9. $(\lambda\mathbf{A})^T = \lambda\mathbf{A}^T$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=[a_{ij}+b_{ij}]=[b_{ij}+a_{ij}]=\mathbf{B}+\mathbf{A}$.

2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=[(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]=[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$.

3. $\mathbf{Z}=\mathbf{O}$.

4. $\mathbf{A}'=-\mathbf{A}$.

5. $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=[\lambda(a_{ij}+b_{ij})]=[\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij}]=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$.

6. $(\lambda+\mu)\mathbf{A}=[(\lambda+\mu)a_{ij}]=[\lambda a_{ij}+\mu a_{ij}]=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$.

7. $(\lambda\mu)\mathbf{A}=[(\lambda\mu)a_{ij}]=[\lambda(\mu a_{ij})]=\lambda(\mu\mathbf{A})$.

8. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=[a_{ji}+b_{ji}]=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$.

9. $(\lambda\mathbf{A})^T=[\lambda a_{ji}]=\lambda\mathbf{A}^T$. ■

1.2.5. Matricu reizināšana

Matricu kopā var definēt *matricu reizināšanu*, kas

- vispārina skaitļu reizināšanu,
- atbilst funkciju kompozīcijai (matrica $\leftrightarrow$ funkcija).

Par $m \times n$ matricas $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}$ reizinājumu ar $n \times r$ matricu $B = [b_{ij}]_{n,r}$ sauksim $m \times r$ matricu $\mathbf{AB} = [x_{ij}]_{m,r}$, kur

$$x_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}.$$

Matricu reizinājums ir operācija, kas ir definēta tikai noteiktos gadījumos, atkarībā no matricu izmēriem.

1.3. piezīme. Ir iespējama matricu reizinājuma vizualizācija trīs matricu stūra veidā - reizinājums ir vidējā matrica, kuras elementi tiek iegūti kā reizinātāju rindu un kolonnu reizinājumi:

$$
\begin{array}{cc}
 & \left[\begin{array}{cc|c|cc} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1r} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nr}\end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \hline a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{array}\right] & \left[\begin{array}{cc|c|cc} x_{11} & .. & x_{1j} & .. & x_{1r} \\ \dots & .. & .. & .. & \dots \\ \hline x_{i1} & .. & x_{ij} & .. & x_{ir} \\ \hline \dots & .. & \dots & .. & \dots \\ x_{m1} & .. & x_{mj} & .. & x_{mr}\end{array}\right]
\end{array}
$$

1.20. piemērs. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$,

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -4 & 15 \end{bmatrix}.$$

1.4. piezīme. $\mathbf{A} = [a_{11}], \mathbf{B} = [b_{11}] \implies \mathbf{AB} = [a_{11}b_{11}]$ - tādējādi matricu reizināšana vispārina skaitļu reizināšanu.

Ja ir dota kvadrātveida matrica $\mathbf{A}$, tad definēsim

$$\mathbf{A}^p = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}}_{p \text{ reizes}} = \mathbf{A}^{p-1} \cdot \mathbf{A}.$$

Definēsim arī $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}_n$.

1.2. teorēma. Ja ir definēti visi reizinājumi, tad

1. $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$.
2. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ (kreisā distributivitāte).
3. $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$ (labā distributivitāte).
4. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (asociativitāte).
5. $\mathbf{A}^u\mathbf{A}^v = \mathbf{A}^{u+v}$, kur $\mathbf{A}$ - kvadrātveida matrica.
6. $(\mathbf{A}^u)^v = \mathbf{A}^{uv}$, kur $\mathbf{A}$ - kvadrātveida matrica.
7. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.
8. $\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}$.
9. $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$.

10. $\exists\ \mathbf{A}, \mathbf{B}: \ \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\lambda(\mathbf{AB}) = [\lambda \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}] = \underbrace{[\sum_{l=1}^{n}(\lambda a_{il})b_{lj}]}_{=(\lambda\mathbf{A})\mathbf{B}} = \underbrace{[\sum_{l=1}^{n} a_{il}(\lambda b_{lj})]}_{=\mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})}$.

2.

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = [\sum_{l=1}^{n} a_{il}(b_{lj}+c_{lj})] =$$

$$[\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj} + \sum_{l=1}^{n} a_{il}c_{lj}] = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$$

3. Līdzīgi 2.

4. !!!

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n}, \mathbf{B} = [a_{ij}]_{n,r}, \mathbf{C} = [c_{ij}]_{r,s}.$$

$$\mathbf{AB} = \Big[\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}\Big]_{m,r},$$

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \Big[\sum_{u=1}^{r}\Big(\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lu}\Big) c_{uj}\Big]_{m,s} = \Big[\sum_{u,l} a_{il} b_{lu} c_{uj}\Big]_{m,s},$$

$$\mathbf{BC} = \Big[\sum_{u=1}^{r} b_{iu} c_{uj}\Big]_{n,s},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \Big[\sum_{l=1}^{n} a_{il}\Big(\sum_{u=1}^{r} b_{lu} c_{uj}\Big)\Big]_{m,s} = \Big[\sum_{u,l} a_{il} b_{lu} c_{uj}\Big]_{m,s}.$$

5. Seko no asociativitātes.

6. Seko no asociativitātes.

7. Apzīmēsim $\mathbf{A}^T = [a_{ji}] = [a^T_{ij}]$, $\mathbf{B}^T = [b_{ji}] = [b^T_{ij}]$.

$$(\mathbf{AB})^T = \Big[\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}\Big]^T = \Big[\sum_{l=1}^{n} a_{jl}b_{li}\Big] =$$

$$\Big[\sum_{l=1}^{n} b_{li}a_{jl}\Big] = \Big[\sum_{l=1}^{n} b^T_{il}a^T_{lj}\Big] = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T.$$

8. $\forall$ matricu reizinājuma elementam visi saskaitāmie ir 0.

9. $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m,n} \implies \mathbf{AE}_n = [\sum_{l=1}^{n} a_{il}\delta_{lj}] = \underbrace{[a_{ij}]}_{l=j}.$

$\mathbf{E}_m\mathbf{A} = [\sum_{l=1}^{n} \delta_{il}a_{lj}] = \underbrace{[a_{ij}]}_{l=i}.$

10. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

$n \times n$ matricu $\mathbf{A}$ sauc par *invertējamu*, ja $\exists$ $n \times n$ matrica $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n.$$

1.21. piemērs. $\mathbf{E}_n^{-1} = \mathbf{E}_n$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

2. 5.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

5.1 Atrodiet matricas $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{3,4}$ elementus, ja $a_{ij} = (-1)^{i+j} - ij$.

5.2 Atrisiniet matricu vienādojumus vai vienādojumu sistēmas:

(a) $\mathbf{X} + \mathbf{A} = 3(\mathbf{X} - \mathbf{B})$, kur $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{cases} \mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{X} - 3\mathbf{Y} = \mathbf{O}_{2,2}. \end{cases}$

5.3 Atrodiet matricu lineārās kombinācijas:

(a) $3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}^T$;

(b) $\sum_{i,j=1}^{3} (-1)^{i+j} \mathbf{E}_{ij}$ $(3 \times 3$ matrica).

5.4 Atrodiet matricu reizinājumus:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & b \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 1 \\ 1 & d \end{bmatrix}$,

(b) $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$,

(c) **AB** un **BA**, kur $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

5.5 Atrodiet matricu pakāpes $\mathbf{A}^n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}$,

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

5.6 (a) Atrodiet matricu reizinājumu

$$\begin{bmatrix} X & Y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Izsakiet matricu formā

$$\begin{bmatrix} X & Y & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{1,1}$$

vienādojumu

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

(c) Izsakiet matricu formā patvaļīgu otrās pakāpes vienādojumu

$$aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f = 0.$$

5.7 Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz matricu $\mathbf{A} \in Mat(2, \mathbb{R})$, kuras apmierina matricu vienādojumu $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}_2$.

5.8 Pierādīt, ka $\forall\ \mathbf{A} \in Mat(n, k)$ var viennozīmīgi izteikt formā $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{sim} + \mathbf{A}_{asim}$, kur $\mathbf{A}_{sim}$ ir simetriska matrica un $\mathbf{A}_{asim}$ ir antisimetriska matrica.

5.8 Interpretēt vienkāršākās matricu operācijas (rindu un kolonnu izsvītrošanu, transponēšanu, reizināšanu ar skaitli, saskaitīšanu, lineārās kombinācijas) izmantojot matricu reizināšanu.