DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

4.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt skaitļu gredzenu teorijas pamatjēdzienus,
- apgūt komplekso skaitļu definīciju un operāciju pamatīpašības.

Lekcijas kopsavilkums:

- skaitļu kopās var definēt gredzenu un lauku struktūras,
- reālo skaitļu lauku var paplašināt līdz lielākam laukam - komplekso skaitļu laukam.

Svarīgākie jēdzieni: pusgrupa, grupa, gredzens, lauks, skaitļu gredzeni un lauki, komplekss skaitlis, komplekso skaitļu aritmētiskās operācijas, komplekso skaitļu kompleksie parametri, komplekso skaitļu trigonometriskā forma.

Svarīgākie fakti un metodes: summēšanas īpašības, pāreja no kompleksā skaitļa algebriskās uz trigonometrisko formu.

1. Skaitļu gredzeni un lauki

1.1. Kopa ar asociatīvu operāciju

Kopas ar vienu asociatīvu bināru operāciju:

- *pusgrupa* - kopa ar asociatīvu bināru operāciju,
- *monoīds* - pusgrupa, kas satur vienības elementu,
- *grupa* - monoīds, kurā katrs elements ir invertējams.

1.1. piemērs. Pusgrupas - $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{R}, \times)$.
Monoīdi - $(\mathbb{N} \cap \{0\}, +)$, $(\mathbb{R} \cap \{1\}, \times)$.
Grupas - $(\mathbb{Z}, +)$.

1.2. Gredzeni

Par *gredzenu* sauc kopu R, kurā ir uzdotas divas bināras operācijas

$$(x, y) \mapsto x + y \text{ (}\textit{aditīvā operācija, saskaitīšana}\text{)},$$
$$(x, y) \mapsto xy \text{ (}\textit{multiplikatīvā operācija, reizināšana}\text{)},$$

kas apmierina šādas īpašības:

- attiecībā uz operāciju $+$ R ir komutatīva grupa:
- operācija $\cdot$ ir asociatīva: $(ab)c = a(bc)$,
- ir spēkā kreisā un labā distributīvās īpašības:

$$a(b + c) = ab + ac, (a + b)c = ac + bc.$$

Gredzenus apzīmēsim ar pierakstu $(R, +, \cdot)$.

Gredzenu sauc par *komutatīvu gredzenu*, ja operācija $\cdot$ ir komutatīva: visiem $a, b \in R$ izpildās $ab = ba$.

Gredzenu sauc par *gredzenu ar vieninieku (unitāru gredzenu)*, ja $\exists$ neitrālais elements 1 attiecībā uz reizināšanas operāciju: $\forall\ a \in R$

izpildās

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

a sauksim par *(multiplikatīvi) invertējamu*, ja tam $\exists$ inversais elements attiecībā uz reizināšanu: $\exists\ z = a^{-1} \in R : \ \ az = za = 1.$

Gredzenu sauc par *integrālu gredzenu*, ja tas ir komutatīvs un tajā nav *nulles dalītāju*: $ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0.$

Integrālu gredzenu R sauc par *lauku*, ja visi nenulles elementi ir invertējami: $u \neq 0 \implies u$ ir invertējams.

1.3. Naturālie skaitļi

Naturālo skaitļu kopa ($\mathbb{N}$) - skaitļi, ko var iegūt dabiskā skaitīšanas ceļā - $1, 2, 3, ...$.

Dabiskās darbības (operācijas) ar naturālajiem skaitļiem - *saskaitīšana, atņemšana, reizināšana, dalīšana.*

$(\mathbb{N}, +)$ ir pusgrupa.

Problēma - naturālo skaitļu kopa nav slēgta attiecībā uz atņemšanu un dalīšanu - divu naturālu skaitļu starpība vai dalījums var nebūt naturāls skaitlis (piemēram, $1 - 2$ vai $1/2$).

Vēsturiski lietojamo skaitļu kopa tika paplašināta vairākos soļos saglabājot aritmētisko operāciju īpašības.

Naturālā skaitļa ģeometriskā interpretācija - garums (piemēram, soļu skaits).

1.4. Veselo skaitļu gredzens

Veselo skaitļu kopa ($\mathbb{Z}$) - naturālo skaitļu kopas un naturālo skaitļu formālo starpību kopas apvienojums.

Ievērosim, ka $\mathbb{Z}$ ir slēgta attiecībā uz saskaitīšanu un atņemšanu - divu veselu skaitļu summa un starpība ir vesels skaitlis. $\mathbb{Z}$ nav slēgta attiecībā uz dalīšanu ($\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$).

Veselie skaitļi ar saskaitīšanas un reizināšanas operācijām veido gredzenu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Veselo skaitļu ğeometriskā interpretācija - orientētais garums, skaitļu ass punkti ar veselām koordinātēm.

1.5. Racionālo skaitļu lauks

Nākamais skaitļu kopas paplašināšanas solis - pievienot visus iespējamos dalījumus.

Racionāls skaitlis - formāls divu veselu skaitļu dalījums.

Ja $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ un $nx = m$, tad apzīmēsim x ar $\frac{m}{n}$. Visu racionālu skaitļu kopu apzīmē ar $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}$ ar saskaitīšanas un reizināšanas operācijām veido lauku $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

1.6. Reālo skaitļu lauks

Reāls skaitlis - algebrisko skaitļu kopas papildinājums pievienojot visas konverģējošu racionālu skaitļu virkņu robežas, visu reālu skaitļu kopu apzīmē ar $\mathbb{R}$.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ - lauks.

Reālos skaitļus interpretē kā punktus uz taisnes izmantojot Dekarta koordinātes.

$\mathbb{R}$ nav slēgta attiecībā uz algebrisku vienādojumu risināšanu ar reāliem koeficientiem. Piemēram, vienādojuma

$$x^2 = -1$$

sakne nevar būt reāls skaitlis.

Nākamais skaitļu kopu paplašināšanas solis - komplekso skaitļu lauks $\mathbb{C}$.

1.7. Eksotiski lauki

Eksistē un tiek izmantoti arī lauki, kas satur galīgu skaitu elementu - *galīgie lauki* (praktiski - datortehnoloģijās, informācijas pārraidē, šifrēšanā). Šajā kursā tie tiks izmantoti reti.

1.2. piemērs. Atlikumu lauki.

$\mathbb{F}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$:

- saskaitīšana $+$ - $\overline{0}+\overline{0}=\overline{0}$, $\overline{0}+\overline{1}=\overline{1}$, $\overline{1}+\overline{0}=\overline{1}$, $\overline{1}+\overline{1}=\overline{0}$;
- reizināšana $\cdot$ - $\overline{0}\cdot\overline{0}=\overline{0}$, $\overline{0}\cdot\overline{1}=\overline{0}$, $\overline{1}\cdot\overline{0}=\overline{0}$, $\overline{1}\cdot\overline{1}=\overline{1}$.

1.8. Summēšana gredzenos

R - gredzens. Definēsim

$$a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_n = \sum_{i=n_0}^{n} a_i, \text{ kur } a_i \in R.$$

- i sauc par *summēšanas indeksu.* To var apzīmēt ar jebkuru citu burtu - tas ir "mēmais" arguments, no tā summas vērtība nav atkarīga.
- $n_0, n \in \mathbb{Z}$ $(n_0 \leq n)$ - *summēšanas robežas*, visbiežāk $n_0 \in \{0, 1\}$.
- Gredzenu elementi un summu locekļi var būt atkarīgi no vairākiem indeksiem, piemēram: $\sum_{i=1}^{100} a_{im} b_{il}$.
- Var būt nepieciešamība apskatīt *vairākkārtīgas summas*, piemēram:

$$\sum_{i=1}^{100} \Big(\sum_{j=1}^{200} s_{ij} \Big).$$

Summēšanas pamatīpašības:

- saskaitāmo kopīgo reizinātāju var iznest ārpus summas zīmes -

$$\sum_{i=n_0}^{n} (ca_i) = c \sum_{i=n_0}^{n} a_i;$$

- summas var dalīt vairākās daļās atkarībā no summmēšanas indeksiem:

$$\sum_{i=n_0}^{n} a_i = \sum_{i=n_0}^{n'} a_i + \sum_{i=n'+1}^{n} a_i;$$

- summas var dalīt vairākās daļās atkarībā no saskaitāmo struktūras:

$$\sum_{i=n_0}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=n_0}^{n} a_i + \sum_{i=n_0}^{n} b_i;$$

- ja vairākkārtīgā summā summēšanas robežas nav atkarīgas no summēšanas indeksiem, tad summēšanas kārtību var mainīt -

$$\sum_{i=n_0}^{n} \left(\sum_{j=m_0}^{m} a_{ij} \right) = \sum_{j=m_0}^{m} \left(\sum_{i=n_0}^{n} a_{ij} \right).$$

2. Pamatfakti par $\mathbb{C}$

2.1. Motivācijas

2.1.1. Algebra

Algebriskā motivācija - reālo skaitļu gredzenā $\mathbb{R}$ nevar atrisināt pat tādu vienkāršu algebrisku vienādojumu kā

$$x^2 + 1 = 0,$$

tāpēc ir vēlams paplašināt $\mathbb{R}$ līdz kādam lielākam gredzenam, kurā šādi vienādojumi būtu atrisināmi.

2.1.2. Ģeometrija

Ģeometriskā motivācija - $\mathbb{R}$ atbilst taisnes punktiem, bet taisne atrodas plaknē, tāpēc vēlams paplašināt $\mathbb{R}$ līdz kādam lielākam gredzenam, kura elementi atbilstu plaknes punktiem.

Izrādās, ka abas motivācijas var apmierināt vienlaicīgi.

2.2. Komplekso skaitļu plakne

Apskatīsim plakni ar Dekarta koordinātu sistēmu. $\forall$ plaknes punktam var savstarpēji viennozīmīgi piekārtot tā Dekarta koordinātes - reālu skaitļu pāri (x, y)- plakni var identificēt ar $\mathbb{R}^2$.

Pamatideja:

$\boxed{\text{uzskatīsim reālu skaitļu pāri } (x, y) \text{ par jauna tipa "skaitli".}}$

Definēsim divas bināras operācijas kopā $\mathbb{R}^2$ šādā veidā:

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ (vektoru saskaitīšana),
- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$ (kaut kas jauns).

Var pārbaudīt, ka

- $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ir lauks ($\mathbb{C}$, *komplekso skaitļu lauks*),
- 0 ir elements $(0, 0)$,
- 1 ir elements $(1, 0)$.

Elementiem $(x,0)$ aritmētiskās operācijas apmierina šādas īpašības:

- $(x_1,0) \pm (x_2,0) = (x_1 \pm x_2.0)$;
- $(x_1,0) \cdot (x_2,0) = (x_1 x_2, 0)$.

$(x,0)$ var identificēt ar x. Tādējādi $\mathbb{C}$ var uzskatīt par $\mathbb{R}$ paplašinājumu, kas apmierina ģeometrisko motivāciju.

Var redzēt, ka elements $i = (0,1)$ apmierina vienādojumu

$$x^2 + 1 = 0.$$

Redzam, ka

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) = x + iy,$$

šo pierakstu parasti arī izmanto.

2.3. Pamatfakti

2.3.1. Aritmētiskās operācijas

Komplekso skaitļu operācijas ir definētas šādā veidā:

- $(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_1) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$,
- $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$,
- dalīšanu definē kā reizināšanas inverso operāciju,

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

$$z = x + iy, \text{ tad } \begin{cases} x = \mathcal{R}e(z) \\ y = \mathcal{I}m(z) \\ \bar{z} = x - iy \ (\textit{kompleksi saistītais skaitlis}). \end{cases}$$

2.3.2. Polārie parametri un trigonometriskā forma

Par $z = x + iy$ *moduli* sauc reālu skaitli $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ - ģeometrisko attālumu no punkta $(0, 0)$ līdz punktam (x, y).

Par $z = x + iy$ *argumentu* $\arg(z)$ sauc lenķi (radiānos), ko veido x-ass ar taisni, kas vilkta caur punktiem $(0, 0)$ un (x, y), reālu skaitli φ:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Redzam, ka

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

(kompleksā skaitļa *trigonometriskā forma*).

$\arg(z)$ ir noteikts ar precizitāti līdz 2π daudzkārtnim.

3. 4.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

4.1 Atrast

(a) $(2+3i)-(4-5i)$,
(b) $(2+3i)\cdot(4-5i)$
(c) $\frac{2+3i}{4-5i}$,
(d) i^n, kur $n \in \mathbb{N}$.

4.2 Atrisināt vienādojumus $(1-i)x = 1+i$.

4.3 Attēlot plaknē skaitļus

(a) -3,
(b) $-3i$,
(c) $-3+i$.

4.4 Atrast trigonometrisko formu

(a) $-i$,
(b) $1+i$
(c) $-1+i\sqrt{3}$.

4.5 Attēlot plaknē punktu kopas, kas apmierina dotos nosacījumus:

(a) $|z| = 1$;
(b) $|z| < 1$;
(c) $\arg(z) = \pi/2$;
(d) $\mathcal{R}e(z) \geq 1$.

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

4.6 Atrast kompleksus skaitļus z ar šādu īpašību: $z^3 = \overline{z}$.

4.7 Atrast $(1 + i)^{2009}$.