DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

3.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt kopu faktorizācijas un tiešā reizinājuma operācijas,
- apgūt permutāciju teorijas pamatjēzienus,
- apgūt attiecību teorijas pamatjēdzienus,
- apgūt algebrisko operāciju teorijas pamatjēdzienus.

Lekcijas kopsavilkums:

- galīgu kopu permutācijas sastāv no cikliem,
- var definēt attiecības jēdzienu un apskatīt svarīgākos speciālgadījumus,
- var definēt un pētīt bināras algebriskas operācijas.

Svarīgākie jēdzieni: permutācija, permutāciju pieraksta veidi, cikliskais pieraksts, transpozīcija, involūcija, bināra attiecība, bināru attiecību speciālgadījumi (refleksīva, simetriska, antisimetriska, tranzitīva), daļējs sakārtojums, ekvivalence, bināra operācija, bināru operāciju speciālgadījumi (asociatīva, komutatīva), vienības elements, invertējams elements, multiplikatīvais un aditīvais pieraksts.

Svarīgākie fakti un metodes: permutācijas sadalījums ciklos, atbilstība starp ekvivalencēm un sadalījumiem.

1. Permutācijas

1.1. Ievads

Par kopas A *permutāciju* sauc bijektīvu funkciju

$$\sigma : A \to A.$$

Visu n elementu kopas $\{1, ..., n\}$ permutāciju kopu apzīmē ar Σ_n.

Permutācijas var uzdot šādos veidos:

- *attēlu saraksts* - $\sigma \rightsquigarrow [\sigma(1), ..., \sigma(n)]$;
- *horizontālais pieraksts* - $\sigma \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$
- *funkcionālais grafs* ar vienu vai diviem kopas eksemplāriem.

1.1. piemērs. $n = 1$ - $[1]$.
$n = 2$ - $[12]$, $[21]$.
$n = 3$ - $[123]$, $[213]$, $[132]$, $[321]$, $[231]$, $[312]$.

Kopā Σ_n var definēt *kompozīcijas* operāciju. Permutāciju kompozīciju sauksim un apzīmēsim kā reizinājumu.

$\forall$ permutācijai σ $\exists$ *inversā permutācija* σ^{-1}:

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \mathrm{id}\,.$$

1.2. Permutācijas sadalījums ciklos

Permutāciju $\sigma : A \to A$ sauc par *ciklisku attēlojumu* vai *ciklu*, ja

- vai nu $|A| \geq 2$ un A elementus var sakārtot virknē $(a_1,...,a_n)$ tā, ka $\sigma(a_i) = a_{i+1}$, $\sigma(a_n) = a_1$.
- vai arī $|A| = 1$ (A vienīgais elements a apmierina vienādību $\sigma(a) = a$).

1.1. teorēma. (permutācijas sadalījums ciklos) $\forall$ galīgas kopas A permutācijai σ $\exists$ viennozīmīgi noteikts A sadalījums $A_1, ..., A_m$ tāds, ka $\forall$ i σ sašaurinājums uz A_i ir cikls.

Var definēt permutācijas *ciklisko pierakstu* šādā veidā. Ja

$$A_1 = \{a_1, ..., a_{n_1}\}, ..., A_m = \{w_1, ..., w_{n_m}\},$$

$$\sigma(a_1) = a_2, ..., \sigma(a_{n_1}) = a_1, ...$$
$$\sigma(w_1) = w_2, ..., \sigma(w_{n_m}) = w_1,$$

tad

$$\sigma = (a_1 a_2 ... a_{n_1}) ... (w_1 w_2 ... w_{n_m})$$

(katrs cikls atdalīts ar iekavām). Ciklus ar garumu 1 (*fiksētos punktus*) cikliskajā pierakstā neuzrāda.

1.2. piemērs. Permutāciju $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ var sadalīt divos ciklos $\{1, 5\} \cup \{2, 4, 3\}$ un apzīmēt kā $(15)(243)$.

Dažas biežāk izmantojamas permutācijas:

- *transpozīcijas* - σ : $\sigma = (ab)$;
- *involūcijas* - σ : $\sigma^2 = \mathrm{id}$.

2. Attiecības

2.1. Pamatfakti

Bināra attiecība - īpašība, kas piemīt vai nepiemīt kopas (vai divu dažādu kopu) sakārtotiem elementu pāriem.

Ja elementu pāra $(x, y) \in A \times B$ elementus x un y saista kāda īpašība, tad teiksim, ka tie ir saistīti ar attiecību ρ - $x\rho y$, pretējā gadījumā - $x \not\rho y$.

Ja $A = B$, tad bināru attiecību sauc par bināru attiecību kopā A. Biežāk tiek izmantotas attiecības vienā kopā.

Strādājot ar konkrētām attiecībām, burta (ρ) vietā izmanto dažādus atdalošos simbolus, piemēram, $< . =, \neq, | \sim, \prec$.

2.1. piemērs. Attiecību piemēri:

- reālu skaitļu vienādība $(=)$,

- reālo skaitļu sakārtojums ($\leq$), jeb attiecība "mazāks vai vienāds",
- kopu ietilpšanas attiecība ($\subseteq$),
- trijstūru līdzība.

Attiecība - īpašība, kas piemīt vai nepiemīt kādas kopas vai vairāku kopu elementu virknēm vai apakškopām (var būt vairāk kā 2 elementi - ne bināra).

2.2. piemērs. Virknes elementi - skaitļi. Virknes $(a_1, ..., a_n)$ elementi ir saistīti ar attiecību $\rho \iff \sum_{i=1}^{n} = 1$.

2.2. Bināru attiecību speciālgadījumi

Apskatīsim tikai attiecības vienā kopā.

Attiecība ρ- *refleksīva*, ja $\forall\ a:\ a\rho a$.

2.3. piemērs. Refleksīvas attiecības: skaitļu vienādība, ģeometrisku figūru vienādība un līdzība.

Attiecība ρ - *simetriska*, ja $\forall\ a, b:\ a\rho b \implies b\rho a.$

2.4. piemērs. Simetriskas attiecības: skaitļu vienādība, figūru līdzība, cilvēku radniecība.

Attiecība ρ - *antisimetriska*, ja $\forall\ a, b:\ a\rho b$ un $b\rho a \implies a = b.$

2.5. piemērs. Antisimetriskas attiecības: skaitļu attiecība "mazāks vai vienāds", naturālu skaitļu dalāmība.

Attiecība ρ - *tranzitīva*, ja $\forall\ a, b, c:\ a\rho b$ un $b\rho c \implies a\rho c.$

2.6. piemērs. Tranzitīva attiecība: skaitļu attiecība "mazāks vai vienāds" ($\leq$).

2.3. Daļējs sakārtojums

Attiecību sauc par *daļēju sakārtojumu*, ja tā ir

1. refleksīva,

2. antisimetriska,
3. tranzitīva.

Daļēja sakārtojuma attiecības apzīmē ar izteikti orientētiem atdalošiem simboliem, piemēram, $\leq, \prec, \ll, \subseteq, \vdash, \trianglelefteq$.

2.7. piemērs. Daži klasiski sakārtojumi: $(\mathbb{R}, \leq)$,$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

2.4. Ekvivalence

Attiecību sauc par *ekvivalenci*, ja tā ir

1. refleksīva;
2. simetriska;
3. tranzitīva.

Ekvivalences apzīmē ar simboliem, kas ir simetriski attiecībā uz vertikālo asi, piemēram, $=, \equiv, \sim, \simeq, \asymp, \approx$.

Visus elementus, kas ir salīdzināmi ar elementu a dotajā ekvivalences attiecībā, sauksim par *a ekvivalences klasi* A_a.

2.8. piemērs. Klasiski ekvivalenču piemēri: skaitļu un, vispārīgāk, matemātisku objektu vienādība, ģeometrisku figūru līdzība.

2.1. teorēma.

1. $\forall$ kopas A sadalījumam var piekārtot A ekvivalenci, kuras ekvivalences klases ir A sadalījuma elementi.
2. $\forall$ kopas A ekvivalencei atbilstošās ekvivalences klases veido A sadalījumu.

PIERĀDĪJUMS

1. Dots kopas A sadalījums $A = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, definēsim tam atbilstošu ekvivalenci $\equiv$: $a \equiv b \iff a$ un b pieder vienai un tai pašai sadalījuma apakškopai A_x.

Pierādīsim, ka definētā attiecība ir ekvivalence:

<u>refleksivitāte</u> - $\forall\ a \in A:\ a \equiv a$,

<u>simetrija</u> - $a \equiv b \implies \{a,b\} \in A_x$ kādai apakškopai A_x un $b \equiv a$,

<u>tranzitivitāte</u> - $a \equiv b$ un $b \equiv c \implies \{a,b\} \in A_x$ un $\{b,c\} \in A_y \implies A_x = A_y$ un $a \equiv c$.

2. Dota ekvivalence $\equiv$, parādīsim, kā tai piekārtot A sadalījumu.

$\forall\ a \in A$ definēsim $A_a = \{x \in A | x \equiv a\}$ (elementa a ekvivalences klasi). $\forall\ a$ izpildās $a \in A_a \implies A_a \neq \emptyset$ un $\bigcup_{a\in A} A_a \implies \{A_a\}_{a\in A}$ ir kopas A pārklājums.

Pierādīsim, ka $A_a \neq A_b \implies A_a \cap A_b = \emptyset$. Ja $A_a \cap A_b \neq \emptyset$, tad eksistē $c:\ c \in A_a$ un $c \in A_b \implies a \equiv c$ un $b \equiv c$. No tranzitivitātes seko, ka $a \equiv b$.

Pieņemsim, ka $\exists\ x \in A_a:\ x \notin A_b \implies x \equiv a$ un $x \not\equiv b$. Tā kā $a \equiv b$, tad no tranzitivitātes seko, ka $x \equiv b$ - pretruna.

Līdzīgā veidā iegūsim pretrunu, ja pieņemsim, ka $\exists\ x$ tāds, ka $x \in A_b$ un $x \notin A_a$. ■

3. Algebriskās operācijas

3.1. Binārās operācijas

Bieži vien kopās, ar kurām nākas sastapties pielietojumos, ir uzdoti pārveidojumi, kas diviem kopas elementiem piekārto kādu šīs kopas elementu.

3.1. piemērs. Kopu operācijas, funkciju kompozīcija, aritmētiskās operācijas, virkņu savienošana.

Ir lietderīgi pētīt šādus pārveidojumus abstraktā veidā (neatkarīgi no kopu un pārveidojumu dabas), ar to nodarbojas matemātikas nozare - *algebra*.

A - kopa. Funkciju

$$\mu : A^2 \to A,$$
$$(a_1, a_2) \mapsto \mu(a_1, a_2)$$

sauc par *binōru operōciju* kopā A.

Pieraksta $\mu(a_1, a_2)$ vietā pieņemts lietot atdalošos simbolus - operācijas zīmes, piemēram $a_1 \circ a_2$, $a_1 \star a_2$ vai vispār nelietot atdalošos simbolus, piemēram, $\mu(a_1, a_2) = a_1 a_2$.

Ja operācijas tiek pielietota vairākas reizes, tad pielietošanas kārtību var viennozīmīgi noteikt izmantojot iekavas un pēctecīgi pielietojot operāciju sākot ar iekšējām iekavām, piemēram:

$$\mu(\mu(x, y), \mu(z, \mu(t, u))) = (x * y) * (z * (t * u)).$$

3.2. Bināro operāciju speciālgadījumi

Definēsim šādus speciālgadījumus:

- *asociatīva operācija* - $\forall\ a, b, c$ izpildās

$$(a * b) * c = a * (b * c);$$

- *komutatīva operācija* - $\forall\ a, b$ izpildās

$$a * b = b * a.$$

3.2. piemērs. Asociatīvu un komutatīvu operāciju piemēri - skaitļu saskaitīšana, reizināšana, kopu apvienojums un šķēlums.

Ja $(A, *)$ ir asociatīvs grupoīds, tad operācijas $*$ pielietošanu virknei $\underbrace{(a, ..., a)}_{n \text{ reizes}}$ sauc par a n-to pakāpi un apzīmē ar pierakstu a^n.

3.3. Elementi ar speciālām īpašībām

A - kopa ar bināru operāciju $*$.

$e \in A$ sauc par *vienības elementu (vieninieku)*, ja $\forall a \in A$ izpildās

$$e * a = a * e = a.$$

Ja grupoīdā $\exists$ vienības elements e, tad a sauc par *invertējamu* *elementu*, ja $\exists b \in A$ tāds, ka

$$a * b = b * a = e,$$

šajā gadījuma b sauc par a *inverso elementu* un apzīmē ar a^{-1}.

3.4. Multiplikatīvais un aditīvais pieraksts

Strādājot ar binārajām operācijām visbiežāk tiek izmantots viens no diviem pieraksta veidiem -

- *multiplikatīvais pieraksts*,
- *aditīvais pieraksts.*

Multiplikatīvajā pierakstā

- bināro operāciju visbiežāk apzīmē ar $\cdot$, $*$ vai kādu līdzīgu simbolu vai arī vispār neraksta atdalošo simbolu,
- vienības elementu apzīmē e ar vai 1,
- elementa a inverso elementu apzīmē ar a^{-1}.

Aditīvo pierakstu izmanto, ja binārā operācija ir acīmredzami komutatīva, piemēram, skaitļu saskaitīšana, šajā gadījumā ir pieņemts apzīmēt

- bināro operāciju ar simbolu + vai kādu tam līdzīgu simbolu,
- vienības elementu (ja tas eksistē) - ar 0,
- elementa a inverso elementu - ar $-a$,
- elementa a pakāpi a^n - ar $na = \underbrace{a + a + ... + a}_{n \text{ reizes}}$.

4. 3.mājasdarbs

4.1. Obligātie uzdevumi

3.1 Dotas permutācijas

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 2 & 7 & 1 & 3 & 8 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Atrast

(a) f^{-1}, g^{-1},
(b) fg, gf, gfg^{-1}.
(c) f, f^2, f^3, g, g^2 sadalījumu ciklos.

3.2 Aprakstīt visas iespējamās ekvivalences attiecības kopā $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

3.3 Atrodiet piemērus šādām operācijām:

(a) nav ne komutatīva, ne asociatīva,

(b) nav komutatīva, bet ir asociatīva.

3.4 Bināra operācija $\bullet$ naturālo skaitļu kopā $\mathbb{N}$ ir definēta ar nosacījumu

$$x \bullet y = x^2 + y^2.$$

Noteikt, vai $\bullet$ ir asociatīva operācija.

3.5 Apskatīsim veselo skaitļu kopu $\mathbb{Z}$ ar bināru operāciju $\diamond$, kas ir definēta ar formulu

$$a \diamond b = a + b + ab.$$

(a) Pierādīt, ka $\diamond$ ir komutatīva operācija.
(b) Pierādīt, ka $\diamond$ ir asociatīva operācija.
(c) Pierādīt, ka eksistē vienības elements.
(d) Atrodiet visus elementus, kuriem eksistē inversais elements.

4.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

3.6 Vispārināt apgalvojumu par permutācijas sadalījumu ciklos uz šādiem gadījumiem:

(a) kopa A ir galīga, funkcija $f : A \to A$ nav bijektīva;
(b) kopa A ir bezgalīga, funkcija $f : A \to A$ ir bijektīva;
(c) kopa A ir bezgalīga, funkcija $f : A \to A$ nav bijektīva.

3.7 Permutācijas ciklisko pierakstu sauc par *standarta ciklisko pierakstu (SCP)*, ja

- tiek norādīti arī fiksētie punkti (cikli ar garumu 1),
- katrā ciklā kā pirmais tiek rakstīts tā maksimālais elements,
- cikli tiek sakārtoti to pirmo elementu augšanas kārtībā.

Piemēram, permutācijas $(1834)(5\underline{10},6)(79\underline{11})$ SCP pieraksts ir $(2)(8341)(\underline{10}65)(\underline{11}79)$.

(a) Pierādīt, ka pēc iekavu izdzēšanas SCP pierakstā var viennozīmīgi atjaunot sākotnējo permutāciju.
(b) Pierādīt, ka jebkuru virkni var iegūt, izdzēšot iekavas kādas permutācijas SCP.