DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

2.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt kopu faktorizācijas un tiešā reizinājuma operācijas,
- apgūt attēlojumu teorijas pamatfaktus.

Lekcijas kopsavilkums:

- kopas var vienkāršot - faktorizēt, var konstruēt kopas, kuru elementi ir virknes,
- var pētīt kopu elementu pārveidojumus un to speciālgadījumus.

Svarīgākie jēdzieni: pārklājums, sadalījums, faktorizācija, virkne, tiešais reizinājums, attēlojums, definīcijas apgabals, elementa attēls, apakškopas attēls, attēlojuma grafs, apvērstais attēlojums, attēlojumu kompozīcija, vienības attēlojums, visur definēts attēlojums, sirjektīvs attēlojums, funkcija (injektīva, sirjektīva, bijektīva), konstants attēlojums, iekļaušanas funkcija, harakteristiskā funkcija.

Svarīgākie fakti un metodes: kompozīcijas asociativitāte.

1. Kopu faktorizācija un tiešais reizinājums

1.1. Kopu faktorizācija

1.1.1. Kopas pārklājums un sadalījums

Ja ir dota kopa A un tās apakškopu kopa $A_I = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, tāda, ka

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A,$$

tad kopu A_I sauc par kopas A *pārklājumu*.

Ja papildus vēl izpildās nosacījums

$$i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset,$$

tad saka, ka A_I ir kopas A *sadalījums* un kopas A_I elementi ir *sadalījuma klases*.

1.1. piemērs.

1.1.2. Faktorizācija

Dots kopas A sadalījums A_I. Pāreju no A uz A_I sauc par kopas A *faktorizāciju* attiecībā uz doto apakškopu sistēmu A_I. Kopu A_I sauc arī par *faktorkopu*.

Faktorizācija ir svarīga kopu teorijas operācija, kas ļauj pāriet no kopas uz šīs kopas daļu kopu, kuru elementiem piemīt kopīgas īpašības.

1.2. piemērs. Pāra skaitļu kopa un nepāru skaitļu kopa veido visu veselu skaitļu kopas sadalījumu

Cilvēku sadalījums pa valstīm.

1.2. Kopu tiešais reizinājums

1.2.1. Virknes

Par *sakārtotu pāri* sauc kopu, kas satur divus elementus un kurā ir definēta kārtība: tiek norādīts, kurš no diviem elementiem ir pirmais, un kurš - otrais, apzīmējumi (a, b) vai $[a, b]$.

Par n elementus garu *virkni* (n-virkni) sauc kopu, kas satur n elementus un kurā katram elementam ir piešķirts kārtas numurs (no 1 līdz n), apzīmējumi $(a_1, a_2, ..., a_n)$ vai $[a_1, a_2, ..., a_n]$.

Par *bezgalīgu virkni* sauc bezgalīgu kopu, kurā katram elementam ir piešķirts kārtas numurs (naturāls skaitlis).

1.2.2. Definīcija

Par divu kopu A un B *tiešo* vai *Dekarta reizinājumu* sauc kopu $A \times B$, kuras elementi ir visi sakārtoti elementu pāri, kuros pirmais elements pieder kopai A, bet otrais elements pieder kopai B:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ un } b \in B\}.$$

Ja ir dota (galīga vai bezgalīga) kopu kopa $\{A_1, ..., A_i, ...\}_{i\in\mathbb{N}}$, tad par šo kopu tiešo vai Dekarta reizinājumu

$$A_1 \times A_2 \times ... = \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$$

sauc kopu, kuras elementi ir visas sakārtotas virknes, kurās elements ar kārtas numuru i pieder kopai A_i:

$$\prod_{\alpha\in I} A_\alpha = \{(a_1, a_2, ...) | a_i \in A_i \text{ katram } i\ \}.$$

Kopas, kas piedalās tiešajā reizinājumā, sauc par tā reizinātājiem.

Ja tiešajā reizinājumā visi reizinātāji ir vienādi ($A_i = A, \forall\ i$), tad tiešo reizinājumu sauc par A pakāpi (apzīmē ar A^n). Definējam arī $A = A^1$.

1.3. piemērs. $A = \mathbb{R}$ (skaitļu taisne). $A^2 = \mathbb{R}^2$ var identificēt ar plakni šādā veidā. Definēsim plaknē Dekarta koordinātes. Katram plaknes punktam savstarpēji viennozīmīgi atbilst sakārtots skaitļu pāris - tā Dekarta koordinātes.

Par divu kopu A un B tiešo reizinājumu $A \times B$ ir lietderīgi domāt kā par tabulu, kurā

- rindas tiek indeksētas ar pirmās kopas A elementiem,
- kolonnas tiek indeksētas ar otrās kopas B elementiem,
- tabulas rūtiņai, kuras rindai atbilst elements $a \in A$ un kuras kolonnai atbilst elements $b \in B$, atbilst tiešā reizinājuma elements (a, b).

2. Attēlojumi un funkcijas

2.1. Pamatdefinīcijas

Kopas parasti tiek uzskatītas par fiksētiem, statiskiem objektiem. Lai atļautu kopu un to elementu pārveidojumus, ievieš *attēlojuma* jēdzienu.

Attēlojums ir kāda darbība vai operācija, kas pārveido, pārstrādā dotās kopas elementus par kādas citas (vai tās pašas) kopas elementiem.

Par *attēlojumu f no kopas A uz kopu B* ($f : A \to B$ vai $A \xrightarrow{f} B$) sauc atbilstības likumu, kas $\forall\ a \in A$ piekārto $f(a) \subseteq B$ (a attēlu attiecībā uz f):

$$\underbrace{a}_{\in A} \mapsto \underbrace{f(a)}_{\subseteq B}.$$

Kopas A elementi, kuru attēli ir netukšas kopas, veido attēlojuma f *definīcijas apgabalu* $D(f) \subseteq A$.

Par kopas A apakškopas A' f-attēlu (apzīmē $f(A')$) sauc kopu

$$\bigcup_{a \in A'} f(a).$$

Par attēlojuma $f : A \to B$ *vērtību kopu* jeb attēlu sauc kopu $f(A) \subseteq B$.

Par kopas B elementa b *inverso attēlu* $f^{-1}(b)$ sauksim kopas A apakškopu

$$\{a \in A | b \in f(a)\}.$$

Divus attēlojumus $f : A \to B$ un $g : A \to B$ uzskata par vienādiem $(f = g) \iff \forall\, a \in A: \; f(a) = g(a)$.

2.1. piemērs. Skaitļu funkcijas $(\sin, \log$ u.c.) ir attēlojumi no kādas reālu skaitļu kopas $\mathbb{R}$ apakškopas uz kādu (iespējams, citu) $\mathbb{R}$ apakškopu.

Valodu prasmes attēlojums:

- kopa A ir visu cilvēku kopa,

- B ir visu cilvēku valodu kopa,
- apskatīsim attēlojumu f, kas piekārto katram cilvēkam to valodu kopu, kuras viņa vai viņš pārvalda.
- ir cilvēki, kuriem tiek piekārtota tukša kopa (piemēram, mazi bērni),
- ir cilvēki, kas pārvalda vienu valodu,
- ir cilvēki, kas pārvalda vairākas valodas.

2.2. Attēlojuma uzdošanas veidi

2.2.1. Attēlu pārskaitīšana

Attēlojumu var uzdot tieši definējot $\forall\ a \in A$ tā attēlu $f(a) \subseteq B$. Šī metode der, ja kopas A un B ir galīgas kopas.

2.2.2. Attēlojuma definējošā īpašība vai algoritms

Attēlojumu var uzdot definējot

- attēlojuma raksturīgu īpašību vai
- attēlu atrašanas algoritmu,

izmantojot matemātiskas vai citas dabas terminus.

2.2. piemērs. $f(x) = \sin(x)$.

2.2.3. Attēlojuma vizualizācija

Attēlojumu ir lietderīgi vizualizēt *attēlojuma grafa* vai *funkcionālā grafa* veidā:

- atzīmēsim visus kopu A un B elementus,
- katram $a \in A$ zīmē bultiņu no a uz katru $b \in f(a)$.

Ja attēlojums ir definēts no kopas A uz A (*attēlojums sevī* vai *endoattēlojums*), tad pietiek atlikt kopas A elementus vienā eksemplārā.

2.3. piemērs.

2.3. Operācijas ar attēlojumiem

2.3.1. Apvērstais (inversais) attēlojums

Par attēlojuma $f : A \to B$ *apvērsto attēlojumu* sauc attēlojumu

$$f^{-1} : B \to A,$$

$$b \mapsto f^{-1}(b).$$

f apvērstais attēlojums tiek iegūts no f, izmainot uz pretējo visu bultiņu virzienus attēlojuma f grafā.

$(f^{-1})^{-1} = f$, jo, mainot bultiņu virzienu divas reizes, iegūstam sākotnējo grafu.

2.3.2. Attēlojumu kompozīcija

Par attēlojumu $f : A \to B$ un $g : B \to C$ *kompozīciju* sauc attēlojumu

$$g \circ f : A \to C$$

$$a \mapsto g(f(a)).$$

2.4. piemērs. $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$, $g \circ f(x) = \cos(\sin(x))$.

Līdzīgi var definēt arī vairāku attēlojumu kompozīciju.

Attēlojuma $f : A \to A$ n-kārtīgo kompozīciju $\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n}$ sauc par f *n-to pakāpi* (f^n).

2.1. teorēma. (kompozīcijas asociativitāte). Jebkuriem trīs attēlojumiem

$$f : A \to B,$$
$$g : B \to C,$$
$$h : C \to D$$

izpildās vienādība

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim, ka $\forall\ a \in A$ izpildās vienādība

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ (g \circ f))(a).$$

Kopa pierādāmās vienādības kreisajā pusē ir

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))).$$

Kopa labajā pusē ir

$$(h \circ (g \circ f))(a) = (h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))).\blacksquare$$

2.4. Attēlojumu speciālgadījumi

2.4.1. Definīcijas

Attēlojumu $\mathrm{id}_A : A \to A$, $\mathrm{id}_A(x) = x$ sauc par *vienības attēlojumu.*

Attēlojumu $f : A \to B$ sauc par

- *visur definētu*, ja $D(f) = A$;

- *sirjektīvu (pārklājošu)*, ja $f(A) = B$;
- *funkciju*, ja tas ir
  1. visur definēts un
  2. $\forall\ a \in A\ |f(a)| = 1$ ($\forall\ a\ f(a)$ ir viens elements).

Funkciju sauc par *injektīvu (iekļaujošu)*, ja jebkuriem dažādiem kopas A elementiem a_1 un a_2 ir dažādi attēli, tas ir,

$$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2).$$

Cita injektivitātes definīcija: $\forall\ b \in f(A)\ |f^{-1}(b)| = 1$.

Funkciju, kas ir vienlaicīgi sirjektīva un injektīva, sauc par *bijektīvu (savstarpēji viennozīmīgu)* funkciju.

Visplašāk pielietotais attēlojumu tips ir funkcijas.

Attēlojumu, kas nav funkcija, bieži sauc par *daudzvērtīgu funkciju*.

Ja attēlojumam $f : A \to B$ izpildās īpašība $f(a) = b$, $\forall a \in A$, kur $b \subseteq B$ ir fiksēta, tad tādu attēlojumu sauksim par *konstantu attēlojumu*.

2.1. piezīme. Funkcijas starp mazām galīgām kopām ir ērti analizēt izmantojot funkciju grafus.

2.4.2. Ar kopu operācijām saistītas funkcijas

- Ja $S \subseteq A$, tad ir definēta injektīva *iekļaušanas* funkcija
$$\iota_S : S \longrightarrow A,$$
$$\iota_S(s) = s,$$
kur labajā pusē elements s tiek uzskatīts par kopas A elementu.
- Ja ir dots attēlojums $f : A \to B$, tad kompozīciju
$$f \circ \iota_S : S \to B$$
sauc par attēlojuma f *sašaurināšanu* uz apakškopu S.

- $\forall\ S \subseteq A$ definēsim funkciju $\chi_S : S \to \{0,1\}$ ar šādu sistēmu:

$$\chi_S(a) = \begin{cases} 1, \text{ ja } a \in S \\ 0, \text{ ja } a \notin S. \end{cases}$$

  Funkciju χ_S sauc par apakškopas S *raksturīgo (harakteristisko) funkciju.*

- Ja A_I ir kopas A faktorkopa, tad ir definēta sirjektīva funkcija

$$\pi : A \to A_I,$$

$$\pi(a) = A_\alpha, \text{ ja } a \in A_\alpha.$$

  ko sauc par faktorkopai atbilstošo *dabisko projekciju.*

3. 2.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

2.1 Pierādīt, ka vispārīgā gadījumā $A \times B \neq B \times A$. (*Norādījums: atrodiet konkrētas kopas A un B, kad vienādība neizpildās*)

2.2 Dotas kopas $A = \{1, 2\}$ un $B = \{u, v\}$. Atrodiet

(a) visus visur definētus attēlojumus no A uz B,
(b) visas funkcijas no A uz B,
(c) visas injektīvas funkcijas no A uz B.

2.3 Dotas kopas A un B, $|A| = n$, $|B| = m$. Cik eksistē funkciju no A uz B?

2.4 Kuri no attēlojumiem $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas uzdoti ar formulām $y = \sin(x)$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = 1/x$, $y = \sqrt{x}$, $y^2 = x$, $y = \ln(x)$, $y = 2^x$ ir

(a) visur definēti,
(b) sirjektīvi,
(c) funkcijas,

(d) injektīvas funkcijas,
(e) bijektīvas funkcijas.