DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

15.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt faktortelpas jēdzienu un pamatīpašības.

Lekcijas kopsavilkums:

- LT var definēt sadalījumus un jaunas LT - *faktortelpas*, kuru elementi ir sadalījuma apakškopas,
- var pētīt faktortelpu īpašības - atrast bāzi, noteikt dimensiju.

Svarīgākie jēdzieni: LT blakusklase attiecībā uz apakštelpu, operācijas ar blakusklasēm, faktortelpa.

Svarīgākie fakti un metodes: blakusklašu īpašības, LVS atrisinājumu kopu interpretācija blakusklašu terminos, blakusklašu operāciju korektums un īpašības, faktortelpas bāzes atrašanas metode, faktortelpas dimensijas formula.

1. Faktortelpa

1.1. Definīcija

1.1.1. Blakusklases

L - LT, $V \leq L$. Definēsim $\mathbf{l} \in L$ *V-blakusklasi (blakusklasi mod V, $\mathbf{l} + V$, afīno apakštelpu)* šādā veidā:

$$\mathbf{l} + V = \{\mathbf{x} \in L | \mathbf{x} = \mathbf{l} + \mathbf{v},\ \text{kur } \mathbf{v} \in V\}.$$

Visu blakusklašu kopu mod V apzīmēsim ar L/V.

Jebkuru $\mathbf{r} \in \mathbf{l} + V$ sauc par *blakusklases pārstāvi.*

1.1. piezīme. Dažādiem elementiem var būt sakrītošas blakusklases.

1.1. piemērs. Vektori. Augšēji trijstūrveida matricas.

Definēsim projekcijas funkciju

$$\pi : L \longrightarrow L/V,$$
$$\pi(\mathbf{l}) = [\mathbf{l}] = \mathbf{l} + V.$$

1.1. teorēma. L - LT, $V \leq L$. Tad

1. $[\mathbf{l}] = [\mathbf{l}'] \iff \mathbf{l} - \mathbf{l}' \in V.$
2. $[\mathbf{l}] = [\mathbf{0}] \iff \mathbf{l} \in V.$

PIERĀDĪJUMS

1. $[\mathbf{l}] = [\mathbf{l}'] \Longrightarrow \forall\ \mathbf{v} \in V\ \exists\ \mathbf{v}' \in V :\ \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{l}' + \mathbf{v}' \Longrightarrow$
$\mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{l}' - \mathbf{l} \in V.$

$$\mathbf{l}' - \mathbf{l} \in V \Longrightarrow \mathbf{l} - \mathbf{l}' = \mathbf{v} \Longrightarrow \mathbf{l} = \mathbf{l}' + \mathbf{v} \Longrightarrow$$

$$\forall\ \widetilde{\mathbf{v}} \in V :\ \mathbf{l} + \widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{l}' + \underbrace{\mathbf{v}' + \widetilde{\mathbf{v}}}_{\in V}.$$

2. $[\mathbf{l}] = [\mathbf{0}] \Longrightarrow \mathbf{l} - \mathbf{0} = \mathbf{l} \in V.$

$\mathbf{l} \in V \implies \mathbf{l} - \mathbf{0} \in V$. ■

1.2. teorēma. Blakusklases mod V veido L sadalījumu:

1. $\forall\, l \in L$ pieder vismaz vienai blakusklasei;
2. divu blakusklases vai nu sakrīt, vai arī to šķēlums ir $\emptyset$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\mathbf{l} = \mathbf{l} + \mathbf{0} \in \mathbf{l} + V$.

2. Pieņemsim, ka $\begin{cases} \mathbf{l} + V \neq \mathbf{l}' + V \\ \Big(\mathbf{l} + V\Big) \cap \Big(\mathbf{l}' + V\Big) \neq \emptyset \end{cases}$

$\mathbf{t} \in \Big(\mathbf{l} + V\Big) \cap \Big(\mathbf{l}' + V\Big) \implies$

$$\begin{cases} \mathbf{t} = \mathbf{l} + \mathbf{v} \\ \mathbf{t} = \mathbf{l}' + \mathbf{v}' \end{cases} \implies \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{l}' + \mathbf{v}' \implies \mathbf{l}' = \mathbf{l} + \mathbf{v}''.$$

$$\implies \forall\, \widetilde{\mathbf{v}} \in V : \begin{cases} \mathbf{l} + \widetilde{\mathbf{v}} = (\mathbf{l}' - \mathbf{v}'') + \widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{l}' + (\widetilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}'') \in \mathbf{l}' + V \\ \mathbf{l}' + \widetilde{\mathbf{v}} = (\mathbf{l} + \mathbf{v}'') + \widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{l} + (\widetilde{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'') \in \mathbf{l} + V \end{cases}$$

$\implies \mathbf{l} + V = \mathbf{l}' + V$. ■

1.1.2. LVS atrisinājumu interpretācija

1.3. teorēma. Ja LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ir saderīga, tad tās atrisinājumu kopa ir blakusklase mod $\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$

$$\pi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \mathcal{N}ull(\mathbf{A}),\ \text{kur } \mathbf{x}_0 \text{ ir patvaļīgs atrisinājums.}$$

PIERĀDĪJUMS

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ - divi LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ atrisinājumi $\Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b} \\ \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b} \end{cases} \Longrightarrow$

$$\underbrace{\mathbf{Ax}_2 - \mathbf{Ax}_2}_{=\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0} \Longrightarrow$$

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathcal{N}ull(\mathbf{A}) \Longrightarrow [\mathbf{x}_1] = [\mathbf{x}_2].$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 \text{ - LVS } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ atrisinājums} \\ \widetilde{\mathbf{x}} \text{ - LVS } \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \text{ atrisinājums} \end{cases} \Longrightarrow$$

$\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \widetilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{Ax}_0 + \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b} \Longrightarrow \mathbf{x}_0 + \widetilde{\mathbf{x}}$ ir LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ atrisinājums. ■

1.1.3. Operācijas ar blakusklasēm

Definēsim operācijas kopā L/V:

- $[\mathbf{l}] + [\mathbf{u}] = [\mathbf{l} + \mathbf{u}]$;
- $\lambda[\mathbf{l}] = [\lambda\mathbf{l}]$.

1.4. teorēma. Operācijas ar blakusklasēm ir definētas korekti - neatkarīgi no blakusklašu pārstāvju izvēles.

PIERĀDĪJUMS

$$\left\{\begin{array}{c} [\mathbf{l}] = [\mathbf{l}'] \\ \Big[\mathbf{u}\Big] = [\mathbf{u}'] \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathbf{l} = \mathbf{l}' + \mathbf{v}, \mathbf{v} \in V \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{w}, \mathbf{w} \in V \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{l} + \mathbf{u} = (\mathbf{l}' + \mathbf{u}') + \mathbf{v} + \mathbf{w} \\ \lambda\mathbf{l} = \lambda(\mathbf{l}' + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{l}' + \lambda\mathbf{v} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} [\mathbf{l} + \mathbf{u}] = [\mathbf{l}' + \mathbf{u}'] \\ \Big[\lambda\mathbf{l}\Big] = [\lambda\mathbf{l}'] \end{array}\right. \quad \blacksquare$$

1.1.4. Faktortelpa

1.5. teorēma. L - k-lineāra telpa, $V \leq L$. Tad L/V ar definētajām operācijām ir k-lineāra telpa (*faktortelpa* L *mod* V).

PIERĀDĪJUMS LT aksiomu pārbaude.

<u>Saskaitīšanas asociativitāte un komutativitāte</u>

$([\mathbf{l}] + [\mathbf{u}]) + [\mathbf{t}] = [\mathbf{l} + \mathbf{u}] + [\mathbf{t}] = [(\mathbf{l} + \mathbf{u}) + \mathbf{t}] =$
$[\mathbf{l} + (\mathbf{u} + \mathbf{t})] = [\mathbf{l}] + [\mathbf{u} + \mathbf{t}] = ([\mathbf{l}] + [\mathbf{u}]) + [\mathbf{t}].$

$[\mathbf{l}] + [\mathbf{u}] = [\mathbf{l} + \mathbf{u}] = [\mathbf{u} + \mathbf{l}] = [\mathbf{u}] + [\mathbf{l}].$

<u>Neitrālais elements</u>

$[\mathbf{0}] + [\mathbf{l}] = [\mathbf{l}] + [\mathbf{0}] = [\mathbf{0} + \mathbf{l}] = [\mathbf{l}]$

<u>Inversais elements</u>

$[\mathbf{l}] + [-\mathbf{l}] = [\mathbf{l} - \mathbf{l}] = [\mathbf{0}] \Longrightarrow -[\mathbf{l}] = [-\mathbf{l}].$

<u>Lauka darbības aksiomas</u>

- $\lambda([\mathbf{l}]+[\mathbf{u}]) = \lambda[\mathbf{l}+\mathbf{u}] = [\lambda\mathbf{l}+\lambda\mathbf{u}] =$
  $= [\lambda\mathbf{l}]+[\lambda\mathbf{u}] = \lambda[\mathbf{l}]+\lambda[\mathbf{u}]$.
- $(\lambda+\mu)[\mathbf{l}] = [\lambda\mathbf{l}+\mu\mathbf{l}] = [\lambda\mathbf{l}]+[\mu\mathbf{l}] = \lambda[\mathbf{l}]+\mu[\mathbf{l}]$.
- $1\cdot[\mathbf{l}] = [1\cdot\mathbf{l}] = [\mathbf{l}]$.
- $\lambda\mu[\mathbf{l}] = [\lambda\mu\mathbf{l}] = \lambda[\mu\mathbf{l}] = \lambda(\mu[\mathbf{l}])$.■

1.2. Īpašības

1.2.1. Bāze

1.6. teorēma. L - LT, $V \leq L$. Izvēlēsimies V bāzi $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, turpināsim to līdz L bāzei $\mathcal{B}_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$. Tad

$$\{[\mathbf{f}_1], ..., [\mathbf{f}_m]\}$$

ir L/V bāze.

PIERĀDĪJUMS
<u>Veidotājsistēma</u>

$\forall\ \mathbf{l} \in L:\ \mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{f}_j \implies$
$[\mathbf{l}] = \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{f}_j\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\lambda_i \mathbf{e}_i\right] + \sum_{j=1}^{m} \left[\mu_j \mathbf{f}_j\right] =$
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[\mathbf{e}_i\right] + \sum_{j=1}^{m} \mu \left[\mathbf{f}_j\right] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[\mathbf{0}\right] + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \left[\mathbf{f}_j\right] =$
$= \sum_{j=1}^{m} \mu_j \left[\mathbf{f}_j\right].$

<u>Lineārā neatkarība</u>
$\sum_{j=1}^{m} \mu_j \left[\mathbf{f}_j\right] = [\mathbf{0}] \implies \left[\sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{f}_j\right] = [\mathbf{0}] \implies$
$\sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{f}_j \in V \implies \sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{f}_j = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \mathbf{e}_i.$

Ja vismaz viens $\mu_j \neq 0$, tad $\exists$ netriviāla lineāra kombinācija starp $\mathcal{B}_L$ elementiem $\implies \overline{\mathcal{B}_L}$ - pretruna. ■

1.2.2. Dimensija

1.7. teorēma. *L - k-lineāra telpa, $\dim(L) < \infty$, $V \leq L$. Tad*

$$\dim(L/V) = \dim(L) - \dim(V).$$

PIERĀDĪJUMS Saskaņā ar iepriekšējo teorēmu

$$\left\{\begin{array}{l}\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\} \text{ ir } V \text{ bāze} \\ \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\} \text{ ir } L \text{ bāze}\end{array}\right. \quad \Longrightarrow$$

$\{[\mathbf{f}_1], ..., [\mathbf{f}_m]\}$ ir L/V bāze $\Longrightarrow$

$$\dim(L/V) = m = (n+m) - n = \dim(L) - \dim(V).\blacksquare$$

2. 15.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

15.1 Aprakstīt LT L blakusklases mod V un atrast L/V bāzi.

(a) $L = \mathbb{R}^2$, $V = \langle(2, -1)\rangle$.

(b) $L = \mathcal{M}at(2, 2, \mathbb{R})$, $V = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(2, 2, \mathbb{R}) | a_{11} + a_{22} = 0\}$.

15.2 Dota LVS

$$\begin{cases} X_1 & -2X_2 & +X_3 & = 1 \\ & -X_2 & +X_3 & = 2. \end{cases}$$

Atrast sistēmas matricas nulltelpu N un aprakstīt LVS atrisinājumu kopu kā blakusklasi mod N.

15.3 $\dim(L) < \infty$, $V, W \leq L$. Pierādīt vienādību

$$\dim(V + W)/W = \dim V/(V \cap W).$$

15.4 Noteikt, vai faktortelpa L/V ir galīgi ģenerēta.

(a) $L = k[X]$, $V = \{f \in k[X] | \deg(f) \leq d\}$.

(b) $L = k[X]$, $V = \{f \in k[X] | f(0) = 0\}$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

15.5 Noteikt, vai faktortelpa L/V ir galīgi ģenerēta.

(a) $L = k^{\mathbb{N}}$, $V = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ...) \in k^{\mathbb{N}} \mid x_1 = ... = x_d = 0\}$.

(b) $L = k^{\mathbb{N}}$,
$V = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ...) \in k^{\mathbb{N}} \mid \exists\ d(\mathbf{x}) :\ \forall\ i > d(\mathbf{x})\ x_i = 0\}$
(V satur visas virknes, kurām galīgs skaits elementu nav 0).

(c) $L = \mathbb{C}$ kā $\mathbb{R}$-lineāra telpa, $V = \mathbb{R}$ kā $\mathbb{R}$-lineāra telpa.

(d) $L = \mathbb{R}$ kā $\mathbb{Q}$-lineāra telpa, $V = \mathbb{Q}$ kā $\mathbb{Q}$-lineāra telpa.