DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

14.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt pirmos LT bāzu pielietojumus lineārajā algebrā.

Lekcijas kopsavilkums:

- elementu koordinātu izmaiņas pārejot uz citu bāzi var tikt aprēķinātas izmantojot matricu reizināšanu;
- izmantojot bāzu teoriju var iegūt svarīgus secinājumus par LT apakštelpam,
- var definēt svarīgu LT apakštelpu operāciju - *tiešo summu;*
- matricu rangus un matricu invertējamību var interpretēt LT dimensiju terminos;
- apakštelpu operācijas var interpretēt matricu terminos.

Svarīgākie jēdzieni: apakštelpu iekšējā tiešā summa, papildinošā apakštelpa, matricas rindu un kolonnu telpa.

Svarīgākie fakti un metodes: algoritmi elementu koordinātu aprēķināšanai pārejot uz citu bāzi, teorēma par apakštelpu dimensijām, papildinošās apakštelpas īpašības, matricas rangu interpretācija, matricas invertējamības kritēriji, apakštelpu summas un šķēluma interpretācija matricu terminos.

1. Lineāras telpas bāzes un dimensijas īpašības un lietojumi

1.1. Bāzes maiņa

Risinot uzdevumus lineārajā algebrā parasti sāk strādāt kādā kanoniskā bāzē. Uzdevuma risināšanas gaitā var būt nepieciešams pāriet uz citu bāzi, kura ir labāk piemērota konkrētajam uzdevumam. Ir jāprot izteikt elementus visās bāzēs.

L - LT, $\dim(L) = n$,
$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$,
$\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$ - divas L bāzes. Katrā bāzē elementus sakārtosim - iegūsim *sakārtotas bāzes.*

Katras bāzes elementus var izteikt kā otras bāzes lineāras kombinācijas:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = a_{11}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{n1}\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_2' = \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\mathbf{e}_i \\ \ldots \\ \mathbf{e}_n' = \sum_{i=1}^{n} a_{in}\mathbf{e}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = s_{11}\mathbf{e}_1' + \ldots + s_{n1}\mathbf{e}_n' = \sum_{i=1}^{n} s_{i1}\mathbf{e}_i' \\ \mathbf{e}_2 = \sum_{i=1}^{n} s_{i2}\mathbf{e}_i' \\ \ldots \\ \mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} s_{in}\mathbf{e}_i' \end{cases}$$

1.1. piemērs. $L = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{\underbrace{(1,0)}_{=\mathbf{e}_1}, \underbrace{(0,1)}_{=\mathbf{e}_2}\}$, $\mathcal{B}' = \{\underbrace{2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}_{=\mathbf{e}_1'}, \underbrace{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}_{=\mathbf{e}_2}\}$.

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{cases}, \begin{cases} \mathbf{e}_1 = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1' + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2' \\ \mathbf{e}_2 = -\frac{1}{3}\mathbf{e}_1' + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2' \end{cases}$$

Kā mainās elementa koordinātes pārejot uz citu bāzi?

$$\mathbf{l} = \sum_{j=1}^{n} l_j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} l_j \Big(\sum_{i=1}^{n} s_{ij} \mathbf{e}'_i \Big) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} l_j \Big) \mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^{n} l'_i \mathbf{e}'_i.$$

$$\mathbf{l} = \sum_{j=1}^{n} l'_j \mathbf{e}'_j = \sum_{j=1}^{n} l'_j \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \mathbf{e}_i \Big) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} l'_j \Big) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} l_i \mathbf{e}_i.$$

Sakārtosim $\mathbf{l}$ koordinātes kolonnas matricas veidā:

$$\mathbf{l} \sim \mathbf{c} = \begin{bmatrix} l_1 \\ ... \\ l_n \end{bmatrix} \text{ vai } \mathbf{c}' = \begin{bmatrix} l'_1 \\ ... \\ l'_n \end{bmatrix}$$

Redzam, ka

$$\begin{cases} \mathbf{c}' = \mathbf{S}\mathbf{c} \\ \mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{c}'. \end{cases}$$

1.2. piemērs. Skatīt iepriekšējo piemēru.

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$. $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{c}' = \mathbf{S}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 8/3 \end{bmatrix}$.

Elementa koordinātes $\forall$ bāzē ir noteiktas viennozīmīgi $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \mathbf{c}' = \mathbf{S}\mathbf{c} = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{c}' = \mathbf{E}_n\mathbf{c}' \\ \mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{c}' = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{c} = \mathbf{E}_n\mathbf{c} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{S}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n \\ \mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{E}_n. \end{cases}$$

1.2. Apakštelpu īpašības

1.2.1. Apakškopu šķēlums un summa

1.1. teorēma. L - LT, $\dim(L) < \infty$, $U, V \leq L$. Tad

$$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

PIERĀDĪJUMS

Apzīmēsim $\begin{cases} \dim(U) = m \\ \dim(V) = n \\ \dim(U \cap V) = l. \end{cases}$. $\begin{cases} U \cap V \leq U \\ U \cap V \leq V \end{cases}$.

Izvēlēsimies apakštelpā $U \cap V$ bāzi

$$\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l\}$$

un papildināsim to līdz U un V bāzēm

$$\begin{cases} \mathcal{B}_U = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_{m-l}\} \subseteq U \\ \mathcal{B}_V = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l, \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{n-l}\} \subseteq V. \end{cases}$$

Redzam, ka kopa

$$\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_V = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_{m-l}, \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{n-l}\}$$

ir $U + V$ veidotājsistēma. Pierādīsim, ka tā ir lineāri neatkarīga un, tādējādi, $U + V$ bāze.

Pieņemsim, ka eksistē lineāra kombinācija

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^{m-l} \nu_i \mathbf{f}_i + \sum_{j=1}^{n-l} \mu_j \mathbf{g}_j = \mathbf{0}.$$

Pārveidosim to šādā veidā:

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^{m-l} \nu_i \mathbf{f}_i = -\sum_{j=1}^{n-l} \mu_j \mathbf{g}_j = \mathbf{h} \implies \mathbf{h} \in U \cap V \implies$$

$$-\sum_{j=1}^{n-l} \mu_j \mathbf{g}_j = \sum_{i=1}^{l} \sigma_i \mathbf{e}_i.$$

Tā kā iegūtā sakarība saista V bāzes elementus, seko, ka tā ir triviāla $\Longrightarrow$ $\sigma_i = 0, \mu_i = 0, \forall\ i$ $\Longrightarrow$ $\lambda_i = 0, \forall\ i$.

Esam pierādījuši, ka $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_V = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_{m-l}, \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{n-l}\}$ ir $U + V$ bāze.

Tagad skaitīsim dimensijas:

$$\dim(U+V) = l + (m-l) + (n-l) = m + n - l =$$
$$\dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).\blacksquare$$

- Ja $V \leq L$, tad lielumu $\dim(L) - \dim(V)$ sauc par V *kodimensiju* $\mathrm{codim}(V)$.
- Ja $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$, tad V un W sauc par neatkarīgām apakštelpām.

1.3. piemērs. Vektori telpā.

1.2.2. Divu apakštelpu iekšējā tiešā summa un papildinošā apakštelpa

$$\left\{\begin{array}{l} V, W \leq L \\ V \cap W = \{0\} \ (\dim V \cap W = 0) \end{array}\right. \implies V+W \text{ sauc par } \textit{(iekšējo)}$$
tiešo summu $V \oplus W$.

Ja $V \oplus W = L$, tad W sauc par *papildinošo apakštelpu* attiecībā uz V (apzīmē ar V^p), un otrādi.

1.2. teorēma. L - LT, $V \leq L$.

1. $\exists\, W \leq L: \ V \oplus W = L$.
2. $L = V \oplus W \iff \forall\, \mathbf{l} \in L\ \exists$ viennozīmīgi noteikti $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in W$ ($\mathbf{l}$ *projekcijas*): $\mathbf{l} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$.
3. $L = V \oplus W \iff \dim(L) = \dim(V) + \dim(W)$.

PIERĀDĪJUMS

1. Izvēlēsimies V bāzi $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, turpināsim to līdz L bāzei $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$.

Apskatīsim $W = \langle \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m \rangle$. Redzam, ka $V + W = L$.

Pierādīsim, ka $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Pieņemsim, ka $\mathbf{t} \in V \cap W \implies$

$$\mathbf{t} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{f}_j.$$

$\mathbf{t} \neq \mathbf{0} \implies \exists\ \lambda_i \neq 0 \implies \overline{\mathcal{B}}$.

2. $\underline{\implies}$ Atradīsim apakštelpu V un W bāzes $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, $\mathcal{B}_W = \{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$.

$\forall\ \mathbf{l} \in L$ var izteikt formā

$$\mathbf{l} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_1}_{=\mathbf{v}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \mu_j \mathbf{f}_j}_{=\mathbf{w}} = \mathbf{v} + \mathbf{w}.$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}' \implies \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{0} \implies \begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}' \\ \mathbf{w} = \mathbf{w}' \end{cases}$$

$\underline{\Longleftarrow}$

$\forall\, \mathbf{l}$ var izteikt summas veidā $\Longrightarrow$ $L = V + W$.

$V \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{t} \in V \cap W$ var izteikt summas veidā divējādi:

$$\mathbf{t} = \underbrace{\mathbf{t}}_{\in V} + \underbrace{\mathbf{0}}_{\in W} = \underbrace{\mathbf{0}}_{\in V} + \underbrace{\mathbf{t}}_{\in W}.$$

3. $\dim(L) = \dim(V) = \dim(W) - \dim(V \cap W)$. ■

1.1. piezīme. Papildinošā apakštelpa nav noteikta viennozīmīgi, ja neskaita speciālgadījumus. $\mathbf{l} \in L$ projekciju uz V apzīmē ar $\pi_V(\mathbf{l})$. Projekcija ir atkarīga no abām telpām V un V^p.

1.4. piemērs. Vektori. Matricas. Polinomi.

1.3. Matricas un lineāru vienādojumu sistēmas

1.3.1. Matricas rindu un kolonnu telpas

$\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(m, n, k)$,

$$\mathbf{A} = [\mathbf{k}_1 | ... | \mathbf{k}_n] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \hline ... \\ \hline \mathbf{r}_m \end{array}\right].$$

Definēsim divas LT, kas ir saistītas ar $\mathbf{A}$:

- $\mathbf{A}$ *rindu telpu* $R(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_m \rangle \leq \mathcal{M}at(1, n, k)$,
- $\mathbf{A}$ *kolonnu telpu* $K(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_n \rangle \leq \mathcal{M}at(m, 1, k)$.

1.3. teorēma. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(m, n, k)$.

1. REP nemaina $R(\mathbf{A})$.
2. KEP nemaina $K(\mathbf{A})$.

PIERĀDĪJUMS

1. $R(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_m \rangle$.

1.veida pārveidojums $\mathbf{r}_i \longleftrightarrow \mathbf{r}_j$
$\langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_i, ..., \mathbf{r}_j, ..., \mathbf{r}_m \rangle = \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_j, ..., \mathbf{r}_i, ..., \mathbf{r}_m \rangle$.

2.veida pārveidojums $\mathbf{r}_i \longrightarrow \lambda \mathbf{r}_i$.

$\mathbf{r}_i = \frac{1}{\lambda}(\lambda \mathbf{r}_i) \Longrightarrow \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_i, ..., \mathbf{r}_m \rangle = \langle \mathbf{r}_1, ..., \lambda \mathbf{r}_i, ..., \mathbf{r}_m \rangle$.

3.veida pārveidojums $\mathbf{r}_j \longrightarrow \mathbf{r}_j + \lambda \mathbf{r}_i$.
$\mathbf{r}_j = (\mathbf{r}_j + \lambda \mathbf{r}_i) - \lambda \mathbf{r}_i \Longrightarrow \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_j, ..., \mathbf{r}_m \rangle = \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_j + \lambda \mathbf{r}_i, ..., \mathbf{r}_m \rangle$.

2. Pierāda līdzīgi. ■

1.3.2. Matricas ranga interpretācija

1.4. teorēma. $\mathbf{A} \in \mathcal{M}at(m, n, k)$.

1. $rr(\mathbf{A}) = \dim R(\mathbf{A})$.

2. $rk(\mathbf{A}) = \dim K(\mathbf{A})$.

PIERĀDĪJUMS

1. Pārveidosim $\mathbf{A}$ ar REP rindu pakāpienveida formā

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{r}'_1 \\ ... \\ \mathbf{r}'_l \\ \mathbf{0} \\ ... \end{bmatrix}, \text{ kur } \mathbf{r}'_i \text{ - nenulles rindas.}$$

$R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}')$.

Pierādīsim, ka $\mathcal{B} = \{\mathbf{r}'_1, ..., \mathbf{r}'_l\}$ ir $R(\mathbf{A})$ bāze.

<u>Veidotājsistēma</u>

Saskaņā ar iepriekšējo teorēmu

$$R(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_m \rangle = \langle \mathbf{r}'_1, ..., \mathbf{r}_l \rangle.$$

<u>Lineārā neatkarība</u>

Pieņemsim, ka $\exists$ lineāra kombinācija

$$\lambda_1 \mathbf{r}'_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2 + ... + \lambda_l \mathbf{r}'_l = \mathbf{0}.$$

Veicam šādu secinājumu virkni:

1. Rindai $\mathbf{r}'_1$ nuļļu skaits no kreisās malas ir stingri mazāks nekā $\mathbf{r}'_2, ..., \mathbf{r}'_l \implies \lambda_1 = 0$.
2. Rindai $\mathbf{r}'_2$ nuļļu skaits no kreisās malas ir stingri mazāks nekā $\mathbf{r}'_3, ..., \mathbf{r}'_l \implies \lambda_2 = 0$.
3. ...
4. Rindai $\mathbf{r}'_{l-1}$ nuļļu skaits no kreisās malas ir stingri mazāks nekā $\mathbf{r}'_l \implies \lambda_{l-1} = 0$.
5. $\lambda_l = 0$.

2. Pierāda līdzīgi, izmantojot KEP. ■

1.3.3. Matricu invertējamības kritēriji

1.5. teorēma. $\mathbf{A} = [\mathbf{k}_1|...|\mathbf{k}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \hline ... \\ \hline \mathbf{r}_n. \end{bmatrix} \in \mathcal{M}at(n,k)$. Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.

1. $\mathbf{A} \in GL(n,k)$ ($\mathbf{A}$ ir invertējama).
2. $\dim \mathcal{N}ull(\mathbf{A}) = 0$.
3. $\underline{\{\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_n\}}$.
4. $\underline{\{\mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_n\}}$.
5. $\dim R(\mathbf{A}) = n$.
6. $\dim K(\mathbf{A}) = n$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\iff r(\mathbf{A}) = n \iff$ 5., 6.

3. $\iff$ 5.,
4. $\iff$ 6..

2. $\iff$ 5.. ■

1.3.4. Apakštelpu summas un šķēluma bāzes (neobligātais materiāls)

$\dim(L) < \infty$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ - L bāze.
$V, W \leq L$,
$\mathcal{G}_V = \{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$ - V veidotājsistēma,
$\mathcal{G}_W = \{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_l\}$ - W veidotājsistēma.

$\mathbf{f}_j = \sum_{i=1}^{n} v_{ij}\mathbf{e}_j$,
$\mathbf{g}_j = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}\mathbf{e}_j$.

$\mathcal{G}_V$ un $\mathcal{G}_W$ elementu koordinātu kolonnas sakārtosim matricās $\mathbf{V} = [v_{ij}]_{n,m}$ un $\mathbf{W} = [w_{ij}]_{n,l}$. Definēsim $\mathbf{A} = [\mathbf{V}|\mathbf{W}]$.

1.6. teorēma.

1. $V + W = K(\mathbf{A})$.
2. $V \cap W$ savstarpēji viennozīmīgi atbilst $\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$.

PIERĀDĪJUMS
1. Seko no matricas kolonnu telpas definīcijas. $K(\mathbf{A})$ ir V un W bāzu lineārais slēgums.

2. $[\mathbf{V}|\mathbf{W}]\left[\begin{array}{c}\lambda_1\\ \dots\\ \lambda_m\\ \hline \mu_1\\ \dots\\ \mu_l\end{array}\right]=\mathbf{0} \iff \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{f}_i+\sum_{i=1}^{l}\mu_i\mathbf{g}_i \iff$

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{f}_i=-\sum_{i=1}^{l}\mu_i\mathbf{g}_i.$$

$\Longrightarrow \forall \left[\begin{array}{c}\lambda_1\\ \dots\\ \lambda_m\\ \hline \mu_1\\ \dots\\ \mu_l\end{array}\right]\in \mathcal{N}ull(\mathbf{A})$ atbilst $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{f}_i\in V\cap W$.

$$\forall\ \mathbf{t} \in V \cap W : \mathbf{t} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^{l} \rho_i \mathbf{g}_i \text{ atbilst } \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_m \\ \hline -\rho_1 \\ \ldots \\ -\rho_l \end{bmatrix} \in$$

$\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$. ■

1.2. piezīme. No iepriekšējās teorēmas seko algoritmi apakštelpas summas un šķēluma bāzu atrašanai:

- lai atrast $V + W$ bāzi, ar KEP matrica $\mathbf{A}$ ir jāpārveido kolonnu pakāpienveida formā, nenulles kolonnas veido $V + W$ bāzi;
- lai atrastu $V \cap W$ bāzi, ar REP matrica $\mathbf{A}$ ir jāpārveido rindu pakāpienveida formā, jāatrod $\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$ bāze, no tās jānolasa V vai W elementi, kas veido $V \cap W$ bāzi.

2. 14.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

14.1 Atrast abas pārejas matricas starp "bāzēm" $\mathcal{B}$ un $\mathcal{B}'$. Pārbaudiet vai dotās kopas ir bāzes.

(a) $L = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathcal{B}' = \{(0,1),(-2,0)\}$;

(b) $L = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$,
$\mathcal{B}' = \{(0,1,2),(2,0,-1),(-1,2,4)\}$;

(c) $L = \mathcal{M}at(2,2,\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{E}_{11},\mathbf{E}_{12},\mathbf{E}_{21},\mathbf{E}_{22}\}$,
$\mathcal{B}' = \{\mathbf{E}_{11}+\mathbf{E}_{12},\mathbf{E}_{12}+\mathbf{E}_{22},\mathbf{E}_{22}+\mathbf{E}_{21},\mathbf{E}_{21}+\mathbf{E}_{11}\}$.

14.2 Atrast bāzes apakštelpām $V+W$ un $V\cap W$.

(a) $L = \mathbb{R}^3$, $V = \langle(1,2,3),(-1,2,1)\rangle$,
$W = \langle(0,1,-1),(2,0,-1)\rangle$;

(b) $L = \mathbb{R}^4$, $V = \langle(1,1,0,1),(-1,0,1,2),(1,1,1,1)\rangle$,
$W = \langle(0,1,1,0),(2,0,-1,-1)\rangle$.

14.3 Atrast apakštelpas V papildinošo apakštelpu V^p.

(a) $L = \mathbb{R}^2$, $V = \{(2,-1)\}$;

(b) $L = \mathbb{R}^3$, $V = \{(0,1,-1),(1,0,1)\}$;

(c) $L = \mathcal{M}at(2,2,\mathbb{R})$, V - antisimetrisku matricu kopa.

14.4 Atrast $\mathbf{l}$ projekciju uz V. Papildinošo apakštelpu izvēlieties patvaļīgi.

(a) $L = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{l} = (4,5)$, $V = \langle(-1,1)\rangle$;

(b) $L = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{l} = (3,-1,2)$, $V = \langle(1,0,1),(2,-2,3)\rangle$;

(c) $L = \mathcal{M}at(2,2,\mathbb{R})$, $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, V - simetrisko matricu kopa.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

14.5 $L = \mathcal{M}at(n,k)$. Pierādīt, ka $W = V^p$, atrast $\pi_V(\mathbf{l})$, $\pi_W(\mathbf{l})$ patvaļīgai matricai $\mathbf{l}$.

(a) V - simetriskās matricas, W - stingri augšēji trijstūrveida matricas (ar nullēm uz diagonāles);

(b) V - antisimetriskās matricas, W - augšēji trijstūrveida matricas;

(c) V - simetriskās matricas, W - antisimetriskās matricas.

14.5 k - lauks.

(a) Pierādīt, ka katra k^n apakštelpa ir kādas homogēnas LVS atrisinājumu kopa.

(b) Klasificēt visas k^n apakštelpas - atrast veidu kā savstarpēji viennozīmīgi piekārtot katrai apakštelpai kādu labāk saprotamu matemātisku objektu, piemēram, matricu kādā noteiktā formā.