DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

13.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt lineāro telpu bāzu teorijas pamatus.

Lekcijas kopsavilkums:

- LT var definēt svarīgu *lineārās neatkarības* jēdzienu,
- LT var apskatīt speciāla veida veidotājsistēmas - *bāzes*,
- var pierādīt vairākas svarīgas bāzu īpašības,
- galīgi ģenerētām LT var definēt svarīgu jēdzienu - *dimensiju.*

Svarīgākie jēdzieni: lineāra atkarība/neatkarība, LT bāze, kanoniskās bāzes, galīgi ģenerēta LT, LT dimensija.

Svarīgākie fakti un metodes: lineāras atkarības īpašības, bāzes eksistence galīgi ģenerētā LT, bāzes īpašības.

1. Lineārā neatkarība, bāze un dimensija

1.1. Lineārā atkarība

1.1.1. Definīcija

LT L elementus $\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_n$ sauc par *lineāri atkarīgiem*, ja eksistē to netriviāla lineāra kombinācija, kas ir vienāda ar $\mathbf{0}$:

$$\exists\ \lambda_1, ..., \lambda_n, \exists\ \lambda_i \neq 0 :\ \lambda_1 \mathbf{l}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{l}_n = 0.$$

Lineāras telpas L elementus $\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_n$ sauc par *lineāri neatkarīgiem*, ja tikai to triviāla lineāra kombinācija ir vienāda ar $\mathbf{0}$:

$$\lambda_1 \mathbf{l}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{l}_n = \mathbf{0} \implies \forall i\ \lambda_i = 0.$$

Bezgalīgu kopu $X \subseteq L$ sauc par lineāri atkarīgu, ja eksistē galīga netriviāla lineāra kombinācija, kas ir vienāda ar $\mathbf{0}$.

Lineārā atkarība un neatkarība ir attiecības, kas ir uzdotas L apakškopās. Faktu, ka X ir lineāri atkarīga (neatkarīga) kopa apzīmēsim ar $\overline{X}$ ($\underline{X}$).

1.1.2. Speciālgadījumi

1 elements

$S = \{\mathbf{l}\}$. $\mathbf{l} \neq \mathbf{0} \iff \underline{S}$.

2 elementi

$S = \{\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2\}$. $\underline{S} \iff \mathbf{l}_1 \neq \lambda \mathbf{l}_2,\ \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2 \neq \mathbf{0}$.

1.1.3. Pamatīpašības

1.1. teorēma. L - lineāra telpa.

1. $\overline{X} \iff \exists\, \mathbf{l} \in X : \mathbf{l} \in \langle X \backslash \{\mathbf{l}\} \rangle$ ($\mathbf{l}$ var izteikt kā pārējo X elementu lineāru kombināciju.
2. $\left\{ \begin{array}{l} \underline{X}, \\ Y \subseteq X \end{array} \right. \implies \underline{Y}$ (lineāri neatkarīgas kopas apakškopa ir lineāri neatkarīga).

3. $\begin{cases} \overline{X}, \\ X \subseteq Z \end{cases} \implies \overline{Z}$ (jebkura kopa, kas satur lineāri atkarīgu apakškopu, ir lineāri atkarīga).

4. $\mathbf{0} \in X \implies \overline{X}$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\overline{X} \iff \exists$ netriviāla lineāra konbinācija

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{l}_i = \mathbf{0}, \text{ kur } \lambda_j \neq 0.$$

$$\implies \lambda_j \mathbf{l}_j = -\sum_{i=1, i\neq j}^{n} \lambda_i \mathbf{l}_i \implies \mathbf{l}_i = -\frac{1}{\lambda_j} \sum_{i=1, i\neq j} \lambda_i \mathbf{l}_i \implies$$

$$\mathbf{l}_j \in \langle X \backslash \{\mathbf{l}_i\} \rangle.$$

$$\exists\, j:\ \mathbf{l}_j \in \langle X \backslash \{\mathbf{l}_i\}\rangle \implies \mathbf{l}_j = \sum_{i=1, i\neq j} \mu_i \mathbf{l}_i \implies$$

$\exists$ netriviāla lineāra kombinācija

$$\mathbf{l}_j - \sum_{i=1, i\neq j} \mu_i \mathbf{l}_i = \mathbf{0} \implies \overline{X}.$$

2. Pieņemsim pretējo:

$$\begin{cases} \underline{X} \\ Y \subseteq X \\ \overline{Y} \end{cases} \implies$$

$\exists$ netriviāla lineāra kombinācija

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{y}_i = \mathbf{0}.$$

Tā pati netriviālā lineārā kombinācija var tikt uzskatīta arī kā lineāra kombinācija ar X elementiem, jo $\mathbf{y}_i \in X$ - pretruna ar $\underline{X}$.

3. Pieņemsim pretējo:

$$\begin{cases} \overline{X}, \\ X \subseteq Z \\ \underline{Z} \end{cases} \implies$$

$\exists$ netriviāla lineāra kombinācija

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

Tā pati netriviālā lineārā kombinācija var tikt uzskatīta arī kā lineāra kombinācija ar Z elementiem, jo $\mathbf{x}_i \in Z$ - pretruna ar $\underline{Z}$.

4. $\mathbf{0} \in X \implies \exists$ netriviāla kombinācija

$$1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot l = \mathbf{0}, \forall\ l \in X. \blacksquare$$

1.2. Lineāras telpas bāze

1.2.1. Definīcija

LT L apakškopu $\mathcal{B}$ sauc par L *bāzi*, ja

1. $\underline{\mathcal{B}}$ ($\mathcal{B}$ ir lineāri neatkarīga kopa),
2. $\langle \mathcal{B} \rangle = L$ ($\mathcal{B}$ ir L veidotājsistēma).

1.1. piezīme. LT bāze nav noteikta viennozīmīgi, ja neskaita atsevišķus gadījumus.

1.1. piemērs. $L = \mathbb{R}^2$ - plaknes vektori, $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$.

1.2.2. Kanoniskās bāzes

Aritmētiskā telpa k^n *Kanoniskā bāze* $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, kur

$$\mathbf{e}_i = \underbrace{(0, ..., 1, ..., 0)}_{\text{1 i-tajā vietā}} :$$

- $(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$,
- $\underline{\mathcal{B}}$: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \implies \forall\ i : \lambda_i = 0$.

<u>Matricu telpa $\mathcal{M}at(m, n, k)$</u> Kanoniskā bāze $\mathcal{B} = \{\mathbf{E}_{11}, ..., \mathbf{E}_{mn}\}$:

- $\mathbf{A} = \sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} \mathbf{E}_{ij}$,
- $\underline{\mathcal{B}}$: $\sum_{i,j=1}^{m,n} \lambda_{ij} \mathbf{E}_{ij} = \mathbf{0} \implies \forall\ i, j : \lambda_{ij} = 0$.

<u>Funkciju telpa $\mathcal{F}un(S, k)$, kur $|S| < \infty$</u>. Kanoniskā bāze $\mathcal{B} = \{e_s\}_{s \in S}$, kur

$$e_s(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja } x = s \\ 0, & \text{ja } x \neq s. \end{cases}$$

- $f(x) = \sum_{s \in S} f(x) e_s(x) = \left(\sum_{s \in S} f(x) e_s\right)(x)$,
- $\underline{\mathcal{B}}$: $\left(\sum_{s \in S} \lambda_s e_s\right)(x) = 0(x) \implies \forall\ s : \lambda_s = 0$.

<u>Polinomi $k[X]$</u> Kanoniskā bāze $\mathcal{B} = \{1, X, X^2 ...\}$, $|\mathcal{B}| = \infty$.

- $p(X) = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i$,
- $\underline{\mathcal{B}}: \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X^i = \mathbf{0} \implies \forall\, i : \lambda_i = 0$.

Matricas $\mathbf{A}$ nulltelpa $\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$ Jebkuru bāzi sauc par *fundamentālo atrisinājumu kopu.*

1.2.3. Bāzes eksistence

LT L sauc par *galīgi ģenerētu*, ja tai eksistē galīga veidotājsistēma.

1.2. piemērs. k^n, $\mathcal{M}at(m, n, k)$ - galīgi ģenerētas.
$k[X]$, $k^{\mathbb{N}}$ - nav galīgi ģenerētas.

1.2. teorēma. L - galīgi ğenerēta LT.

1. $\exists$ L bāze $\mathcal{B}$: $|\mathcal{B}| < \infty$.
2. $\left\{ \begin{array}{l} S \subseteq L \\ \underline{S} \end{array} \right. \Longrightarrow \exists\ \mathcal{B} \subseteq L : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B} - L \text{ bāze} \\ S \subseteq \mathcal{B}. \end{array} \right.$ (jebkuru lineāri neatkarīgu kopu var papildināt līdz bāzei).

PIERĀDĪJUMS

1. Pieņemsim, ka $L = \langle \mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_n \rangle = \langle \mathcal{G} \rangle$.

Ja kopu $\mathcal{G}$ var samazināt uz kopu $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$ saglabājot veidotājsistēmas īpašību, tad to darīsim. Iegūsim, iespējams, mazāku kopu

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_m\} : \left\{ \begin{array}{l} \langle \mathcal{B} \rangle = L \\ \mathcal{C} \subsetneq \mathcal{B} \Longrightarrow \langle C \rangle \neq L. \end{array} \right.$$

Pierādīsim, ka $\mathcal{B}$ ir lineāri neatkarīga.

Pieņemsim pretējo: $\exists$ netriviāla lineāra kombinācija

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0}.$$

Pieņemsim, ka $\lambda_j \neq 0 \implies$

$$\mathbf{b}_j = -\frac{1}{\lambda_j}\sum_{i\neq j}\lambda_i \mathbf{b}_i \implies \mathbf{b}_j \in \langle \mathcal{B}\backslash \mathbf{b}_j\rangle \implies$$

$L = \langle \mathcal{B}\backslash \mathbf{b}_j\rangle$ - pretruna, jo $\mathcal{B}$ nevar samazināt saglabājot veidotājsistēmas īpašību.

2. Pieņemsim, ka

- $S = \{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$,
- $\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ ir L bāze, kas $\exists$ saskaņā ar pirmo apgalvojumu.

Apskatīsim elementu virkni

$$(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n).$$

Lasīsim šo virkni no kreisās puses un svītrosim visus elementus, kas izsakās kā iepriekšējo elementu lineāra kombinācija. $\underline{S} \implies$ jāsvītro būs tikai $\mathcal{B}_0$ elementi.

Rezultātā iegūsim virkni

$$(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m, \mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_j}).$$

Pierādīsim, ka kopa $\mathcal{B} = \{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m, \mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_j}\}$ ir bāze.

Lineārā neatkarība

Ja eksistētu netriviāla lineāra kombinācija

$$\lambda_1 \mathbf{f}_1 + ... + \lambda_m \mathbf{f}_m + \mu_1 \mathbf{e}_{i_1} + ... + \mu_j \mathbf{e}_{i_j} = 0,$$

tad $\mathbf{e}_l$ ar maksimālo indeksu, kuram $\mu_l \neq 0$ varētu izteikt kā iepriekšējo lineāru kombināciju - pretruna.

Veidotājsistēma

$\langle \mathcal{B}_0 \rangle = L$, $\forall$ izsvītrotais $\mathcal{B}_0$ elements izsakās kā neizsvītroto elementu lineāra kombinācija $\Longrightarrow$ $\forall\, x \in L$ izsakās kā $\mathcal{B}$ elementu lineāra kombinācija $\Longrightarrow$ $\langle \mathcal{B} \rangle = L$. ■

1.2. piezīme. Ja L nav galīgi ģenerēta LT, tad bāze arī eksistē. Tas ir grūtāk pierādāms. Var apskatīt piemērus $k[X]$ un $k^{\mathbb{N}}$.

1.2.4. Bāzes īpašības

1.3. teorēma. L - LT, $\mathcal{B} \subseteq L$. Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.

1. $\mathcal{B}$ - L bāze.
2. $\forall\ \mathbf{l} \in L$ ir viennozīmīgi izsakāms kā $\mathcal{B}$ elementu lineāra kombinācija.
3. $\mathcal{B}$ ir maksimāla lineāri neatkarīga L apakškopa:
$$\begin{cases} \underline{\mathcal{B}} \\ \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{C} \end{cases} \Longrightarrow \overline{\mathcal{C}}.$$
4. $\mathcal{B}$ ir minimāla L veidotājsistēma:
$$\begin{cases} \langle \mathcal{B} \rangle = L \\ \mathcal{D} \subsetneq \mathcal{B} \end{cases} \Longrightarrow \langle \mathcal{D} \rangle \lneq L.$$

PIERĀDĪJUMS

<u>1. $\Longrightarrow$ 2.</u>

$\langle \mathcal{B} \rangle = L \implies \forall\, \mathbf{l} \in L$ ir izsakāms lineāras kombinācijas veidā:

$$\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{b}_i.$$

Pieņemsim, ka $\exists\, \mathbf{l}$, kurš var tikt izteikt divos veidos:

$$\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathbf{b}_i \implies$$

$$\mathbf{l} - \mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{b}_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) \mathbf{b}_i = \mathbf{0}.$$

$\underline{\mathcal{B}} \implies \lambda_i - \mu_i = 0, \forall\, i.$

$\underline{2. \implies 1.}$

Uzreiz seko, ka $\langle \mathcal{B} \rangle = L$.

$\mathbf{0}$ var viennozīmīgi izteikt $\mathcal{B}$ elementu lineāras kombinācijas veidā ar 0 koeficientiem $\implies \underline{\mathcal{B}}$.

$\underline{2. \implies 3.}$

$$\left\{\begin{array}{l}\underline{\mathcal{B}} \\ \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{C}\end{array}\right. \Longrightarrow \exists\, c \in \mathcal{C}\backslash\mathcal{B}: \; c \in \langle\mathcal{B}\rangle \Longrightarrow \overline{\mathcal{C}}.$$

<u>1. $\Longrightarrow$ 4.</u>

Uzreiz seko, ka $\langle\mathcal{B}\rangle = L$.

$\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{B} \Longrightarrow \exists\, \mathbf{b} \in \mathcal{B}\backslash\mathcal{D}$. Ja $\mathbf{b}$ varētu izteikt kā $\mathcal{D}$ lineāru kombināciju

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{d}_i,$$

tad eksistētu netriviāla lineāra kombinācija

$$\mathbf{b} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{d}_i = \mathbf{0} \text{ - pretruna ar } \underline{\mathcal{B}}.$$

$\Longrightarrow \mathbf{b} \notin \langle\mathcal{D}\rangle \Longrightarrow \langle\mathcal{D}\rangle \lneq L$

<u>4. $\Longrightarrow$ 1.</u>

$\overline{\mathcal{B}} \Longrightarrow \exists\, \mathbf{b} \in \mathcal{B}: \; \mathbf{b} \in \langle\underbrace{\mathcal{B}\backslash\{\mathbf{b}\}}_{=\mathcal{F}}\rangle \Longrightarrow \langle\mathcal{F}\rangle = L$ - pretruna. ■

1.3. Lineāras telpas dimensija

1.3.1. Lineāri neatkarīgu kopu ģeneratoru skaits

1.4. teorēma. $L = \langle l_1, ..., l_n \rangle$, $S \subseteq L$. Tad

$$\underline{S} \implies |S| \leq n.$$

PIERĀDĪJUMS
Kontrapozitīvais pierādījums: pierādīsim, ka $|S| > n \implies \overline{S}$.

Pieņemsim, ka $S = \{\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_m\}$, kur $m > n$. Izteiksim $\forall$ $\mathbf{t}_i$ kā $\{l_1, ..., l_n\}$ elementu lineāru kombināciju:

$$\mathbf{t}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathbf{l}_j.$$

Vai $\exists$ netriviāla lineāra kombinācija $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{t}_i = \mathbf{0}$?

$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{t}_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathbf{l}_j \Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i \Big) \mathbf{l}_j.$

Apskatīsim sistēmu

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} a_{i1}\lambda_i = 0 \\ \ldots \\ \sum_{i=1}^{m} a_{im}\lambda_i = 0 \end{array}\right. \iff \mathbf{B}\lambda = \mathbf{0},$$

kur $\mathbf{B}$ ir $n \times m$ matrica.

$n < m \implies r(\mathbf{B}) \leq n \implies \exists$ netriviāls atrisinājums

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \implies$$

$\exists$ netriviāla lineāra kombinācija $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{t}_i = \mathbf{0} \implies \overline{S}$. ■

1.5. teorēma. L - galīgi ģenerēta LT, $\exists$ L bāze $\mathcal{B}$: $|\mathcal{B}| = n$.

1. $\forall$ L bāze satur n elementus.
2. $\left\{\begin{array}{l} |S| = n \\ \underline{S} \end{array}\right. \implies S$ - L bāze.

PIERĀDĪJUMS

1. Pieņemsim, ka $\exists$ L bāze $\mathcal{C}$: $|\mathcal{C}| < n$. Tā ir pretruna ar iepriekšējo teorēmu, jo $L = \langle \mathcal{C} \rangle = \langle B \rangle$, bet $|\mathcal{B}| > |\mathcal{C}|$.

Tāpat iegūst pretrunu, ja pieņem, ka $\exists$ L bāze $\mathcal{D}$, kurai $|\mathcal{D}| > n$.

2. S ir maksimāla lineāri neatkarīga sistēma, tātad - bāze. ■

1.3.2. Definīcija

No iepriekšējās teorēmas seko, ka galīgi ģenerētas LT bāzes elementu skaits ir konstants.

Galīgi ģenerētas LT L bāzes elementu skaitu sauc par L *dimensiju* $\dim(L)$.

Definēsim arī $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$.

1.3. piemērs. $\dim(k^n) = n$ - vektoru telpa, $\dim(\mathcal{M}at(m, n, k)) = mn$.

2. 13.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

13.1 Noteikt, vai dotās LT elementu kopas ir lineāri neatkarīgas.

(a) $L = \mathbb{R}^2$, $\{(1,2),(3,4)\}$;
(b) $L = \mathbb{R}^3$, $\{(2,-1,0),(3,1,-2),(1,2,-2)\}$;
(c) $L = \mathbb{R}^4$, $\{(2,4,-1,1),(3,2,1,0),(1,1,-1,1),(2,0,0,9)\}$.

13.2 Ar kādām parametru vērtībām dotās LT elementu kopas ir lineāri neatkarīgas?

(a) $L = \mathbb{R}^3$, $\{(1,2,1),(-1,0,\alpha),(2,1,\beta)\}$;
(b) $L = \mathcal{M}at(2,2,\mathbb{R})$, $\{\alpha(\mathbf{E}_{11}+\mathbf{E}_{12}),\beta(\mathbf{E}_{12}+\mathbf{E}_{21}),\gamma(\mathbf{E}_{11}+\mathbf{E}_{21})\}$.

13.3 Pierādīt, ka dotās LT $\mathcal{F}un(\mathbb{R},\mathbb{R})$ elementu kopas ir lineāri neatkarīgas.

(a) $\{1,x,x^3\}$;
(b) $\{\sin x,\cos x\}$;
(c) $\{e^{a_1x},e^{a_2x}\}$, kur $a_1 \neq a_2$.

13.4 Noteikt, vai $\mathcal{B}$ ir LT telpas L bāze.

(a) $L = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(1, 1/2), (2, 1)\}$;
(b) $L = \mathcal{M}at(2, 3)$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{E}_{11}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{13}, \mathbf{E}_{21}\}$;
(c) $L \leq \mathbb{R}[X]$, $L = \{f | \deg(f) \leq 2\}$, $\mathcal{B} = \{1, X - 1, (X - 1)^2\}$.

13.5 Papildināt kopu S līdz LT L bāzei.

(a) $L = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$;
(b) $L = \mathcal{M}at(2, 2)$, $S = \{\mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{22}, \mathbf{E}_{12} + \mathbf{E}_{21}\}$;
(c) $L \leq \mathbb{R}[X]$, $L = \{f | \deg(f) \leq 2\}$, $S = \{2, X^2 + 2X + 2\}$.

13.6 Noteikt LT L dimensiju.

(a) $L \leq \mathbb{R}^3$, $L = \{\mathbf{v} | \mathbf{v} = (x, y, 0), \forall\ x, y\}$;
(b) $L \leq \mathcal{M}at(m, n, \mathbb{R})$, L - augšēji trijstūrveida matricas;
(c) $L \leq \mathbb{R}[X]$, $L = \{f | \deg(f) \leq 10\}$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

13.7 Atrodiet bāzes pusmağisko un mağisko kvadrātu telpās ar izmēriem $2, 3, 4$.

13.8 L - lineāra telpa, $\dim(L) = n$, $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_n$ - L bāzes. Pierādīt, ka var izveidot matricu $\mathbf{B}$ ar šādām īpašībām:

- $\mathbf{B}$ i-tajā rindā ir visi bāzes $\mathcal{B}_i$ elementi (katras rindas elementi veido L bāzi),
- katras $\mathbf{B}$ kolonnas elementi veido L bāzi.

Piezīme. Gadījumus, ja $n \in \{2, 3\}$, atrisināt nav grūti. Patvaļīgam n dotā problēma vēl nav atrisināta (*G.C.Rota problēma*)