DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

12.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt lineāro telpu teorijas pamatdefinīcijas.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt algebrisku struktūru - *lineāro telpu (LT)*, kas vispārina vektoru, matricu un LVS atrisinājumu īpašības,
- vairākās zināmās struktūrās var atpazīt LT īpašības.

Svarīgākie jēdzieni: k-lineāra telpa, aritmētiskā LT, matricu LT, funkciju LT, matricas nulltelpa, LT apakštelpa, apakštelpu summa, lineāra kombinācija, kopas lineārais slēgums, LT veidotājsistēmas.

Svarīgākie fakti un metodes: LT pamatīpašības, apakštelpu un to operāciju īpašības, lineārā slēguma īpašības.

1. Lineārās telpas

1.1. Ievads

1.1.1. Zināmās algebriskās struktūras

Līdz šim brīdim tika definētas 2 algebriskas struktūras:

- grupas:
  - viena bināra asociatīva operācija,
  - eksistē neitrālais elements,
  - katram elementam eksistē inversais elements;
- gredzeni:
  - divas bināras asociatīvas operācijas $+$ un $\cdot$,
  - attiecībā uz $+$ - komutatīva grupa,
  - $+$ un $\cdot$ saista distributivitātes likums.

Grupu piemēri: $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R}\backslash\{0\},\cdot)$

Gredzenu piemēri: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Gredzena speciālgadījums - lauks: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Definēsim jauna tipa algebrisku struktūru: *lineāru telpu (LT) virs lauka*, kurā ir definētas šādas operācijas:

1. saskaitīšana $+$, attiecībā uz saskaitīšana LT ir komutatīva grupa: LT elementus var saskaitīt tā it kā tie būtu skaitļi;
2. reizināšana ar lauka elementiem, LT elementus var "izstiept" ar koeficientu.

Ja nav uzdota papildus struktūra, LT elementus nevar "reizināt" savā starpā.

Par LT elementiem var domāt kā par "daudzdimensionāliem skaitļiem", kurus gan nevar "reizināt" savā starpā.

1.1.2. Motivējošie piemēri

Homogēnas LVS atrisinājumi

Homogēnai LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$

- atrisinājumu (kā kolonnu vai rindu matricu) summa ir atrisinājums:

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \end{cases} \implies \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

- atrisinājuma (kā kolonnu vai rindu matricu) reizinājums ar skaitli ir atrisinājums:
  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$

Tādējādi homogēnas LVS atrisinājumu kopā var definēt 2 minētās operācijas - tā ir slēgta attiecībā uz šīm operācijām.

Paralēlā pārnese, vektori

Citos kursos tika definēti *vektori:*

- nogrieznis ar virzienu,
- sakārtots punktu pāris.

Tika definētas šādas operācijas ar vektoriem:

- vektoru saskaitīšana,
- vektora reizināšana ar skaitli.

Var redzēt, ka vektoru operācijām izpildās šādas īpašības:

- saskaitīšana ir asociatīva un komutatīva,
- eksistē nulles vektors,
- katram elementam eksistē negatīvais vektors,
- reizināšanai ar skaitli izpildās distributīvās un asociatīvās īpašības.

1.1.3. Definīcija

Par *lineāru telpu (LT) virs lauka k (k-lineāru telpu, vektoru telpu)* sauc kopu L ar šādām operācijām:

1. bināra operācija $+$ kopā L tāda, ka $(L, +)$ ir komutatīva grupa (*LT L aditīvā grupa*, izmanto aditīvo pierakstu) -
   - $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativitāte),
   - $x + y = y + x$ (komutativitāte),
   - $\exists\, 0 \in L :\ x + 0 = x, \forall\, x \in L$ (neitrālā elementa eksistence),
   - $\forall\, x \in L\ \exists -x :\ x + (-x) = 0$ (inversā elementa eksistence);

2. lauka k *darbības funkcija* $k \times L \to L$:
    - $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$,
    - $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
    - $1 \cdot x = x$,
    - $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.

Ar simbolu $+$ parasti apzīmē saskaitīšanu gan laukā k, gan LT, cenšas nepieļaut pārpratumus.

Ja $k = \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, tad k-lineāru telpu sauc par *reālu (kompleksu) lineāru telpu*.

Vienā kopā var LT struktūra virs dažādiem laukiem.

1.1. teorēma. $\forall$ LT izpildās šādas īpašības:

1. $0 \cdot \mathbf{l} = \mathbf{0}$.
2. $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
3. $\lambda \cdot \mathbf{l} = \mathbf{0} \implies \lambda = 0$ vai $\mathbf{l} = \mathbf{0}$.

4. $n \cdot \mathbf{l} = \underbrace{\mathbf{l} + ... + \mathbf{l}}_{n \text{ reizes}}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$

5. $(-1) \cdot \mathbf{l} = -\mathbf{l}.$

6. $(-\lambda)\mathbf{l} = -(\lambda\mathbf{l}) = \lambda(-\mathbf{l}).$

PIERĀDĪJUMS

1. $0 \cdot \mathbf{l} = (0+0)\mathbf{l} = 0 \cdot \mathbf{l} + 0 \cdot \mathbf{l} \implies$
$0 \cdot \mathbf{l} + (-0 \cdot \mathbf{l}) = 0 \cdot \mathbf{l} + 0 \cdot \mathbf{l} + (-0 \cdot \mathbf{l}) \implies \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{l}.$

2. $\lambda \cdot \mathbf{0} = \lambda \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda \cdot \mathbf{0} + \lambda \cdot \mathbf{0} \implies$
$\lambda \cdot \mathbf{0} = \lambda \cdot \mathbf{0} + \lambda \cdot \mathbf{0} \implies \mathbf{0} = \lambda \cdot \mathbf{0}.$

3. $\lambda \neq 0 \implies \exists \lambda^{-1} \implies$
$\lambda^{-1}(\lambda \cdot \mathbf{l}) = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot \mathbf{l} = 1 \cdot \mathbf{l} = \mathbf{l} = \mathbf{0}.$

4. Indukcija ar parametru n. Pieņemsim, ka $(n-1)\mathbf{l} = \underbrace{\mathbf{l} + ... + \mathbf{l}}_{n-1 \text{ reizes}} \implies$

$$n \cdot \mathbf{l} = (n-1+1)\mathbf{l} = (n-1)\mathbf{l} + \mathsf{l} = \underbrace{\mathbf{l} + \ldots + \mathbf{l}}_{n-1 \text{ reizes}} + \mathbf{l} = \underbrace{\mathbf{l} + \ldots + \mathbf{l}}_{n \text{ reizes}}.$$

5. $(-1) \cdot \mathbf{l} + \mathbf{l} = (-1+1)\mathbf{l} = 0 \cdot \mathbf{l} = \mathbf{0} \implies -\mathbf{l} = (-1) \cdot \mathbf{l}.$

6. $(-\lambda)\mathbf{l} = (\lambda(-1)\mathbf{l}) = \lambda(-\mathbf{l}).$

$(-\lambda)\mathbf{l} = (-1)(\lambda \cdot \mathbf{l}) = -(\lambda\mathbf{l}).$ ■

1.2. Klasiskās lineārās telpas

1.2.1. Divi speciālgadījumi

$\forall$ laukam k kopa $\{0\}$ ir LT, operācijas ir definētas šādi:

- $0 + 0 = 0$;
- $\lambda \cdot 0 = 0$.

$\forall$ laukam k kopa k ir LT, operācijas ir definētas šādi:

- $+$ ir lauka saskaitīšanas operācija;
- $\cdot$ ir lauka reizināšanas operācija.

1.2.2. Aritmētiskā (koordinātu, vektoru) telpa

k - lauks. Definēsim kopā $\underbrace{k \times ... \times k}_{n \text{ reizes}} = k^n$ LT struktūru šādā veidā:

- $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$;
- $\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.

Var pārbaudīt, ka visas aksiomas izpildās.

k^n, kur $n \in \{1, 2, 3\}$ var identificēt ar ğeometrisko vektoru telpām.

Var definēt LT, kuras elementi ir bezgalīgas virknes.
Apzīmēsim ar $k^{\mathbb{N}}$ kopu, kuras elementi ir visas uz labo pusi bezgalīgās virknes formā $(x_1, ..., x_n, ...)$.

Kopā $k^{\mathbb{N}}$ ir uzdota LT struktūra ar virkņu saskaitīšanas un reizināšanas ar skaitli operācijām.

1.2.3. Matricu telpa

k - lauks. Definēsim matricu kopā $\mathcal{M}at(m,n,k)$ LT struktūru šādā veidā:

- $+$ - matricu saskaitīšana;
- $\cdot$ - matricas reizināšana ar skaitli.

Var pārbaudīt, ka visas aksiomas izpildās.

1.1. piezīme. $k^n = \mathcal{M}at(1,n,k)$.

1.2.4. Funkciju telpa

S - kopa, k - lauks. Apzīmēsim ar $\mathcal{F}un(S,k)$ visu funkciju kopu no S uz k. Definēsim kopā $\mathcal{F}un(S,k)$ LT struktūru šādā veidā:

- $(f,g) \mapsto f+g$: $(f+g)(s) = f(s)+g(s)$;
- $(\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f$: $(\lambda \cdot f)(s) = \lambda \cdot f(s)$.

Var pārbaudīt, ka visas aksiomas izpildās.

Var apskatīt LT, kuru elementi ir funkcijas ar speciālām īpašībām, piemēram:

- visu n argumentu polinomu kopa ar koeficientiem laukā k - $k[X_1, ..., X_n]$,
- visu nepārtrauktu reālā argumenta funkciju kopa ar definīcijas apgabalu $[a, b]$ - $C^0([a, b])$,

1.2.5. Homogēnas LVS atrisinājumu telpa

$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ - homogēna $m \times n$ LVS ar atrisinājumu kolonnu kopu $\mathcal{N}ull(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{M}at(n, 1, k)$:

$$\mathcal{N}ull(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M}at(n, 1, k) | \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}.$$

$\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$ sauc arī par matricas $\mathbf{A}$ *nulltelpu.*

Definēsim kopā $\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$ LT struktūru kā matricām.

Var pārbaudīt, ka

- $\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$ ir slēgta attiecībā uz LT operācijām,
- visas aksiomas izpildās.

1.3. Apakštelpas

1.3.1. Pamatfakti

L - LT, $V \subseteq L$. V sauc par L *apakštelpu* (*lineāru apakštelpu*, apzīmē $V \leq L$), ja

1. $\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V \implies \mathbf{v}+\mathbf{v}' \in V$ (V ir slēgta attiecībā uz saskaitīšanu),
2. $\forall\ \lambda \in k\ \forall\ \mathbf{v} \in V \implies \lambda\mathbf{v} \in V$ (V ir slēgta attiecībā uz reizināšanu ar lauka elementiem).

1.2. piezīme. $\forall$ LT L $\exists$ 2 *triviālas apakštelpas:*

- $\{\mathbf{0}\} \leq L$,
- $L \leq L$.

1.1. piemērs. Taisnes vektori. Diagonālas matricas. Monomi. Polinomi ar ierobežotu pakāpi.

1.2. teorēma. L - lineāra telpa. $V \leq L \implies V$ ir LT.

PIERĀDĪJUMS LT operācijas ir korekti definētas kopā V. LT aksiomas izpildās tāpēc, ka tās izpildās LT L. ■

1.3.2. Operācijas ar apakštelpām

Var definēt apakštelpu šķēlumu.

1.3. teorēma. L - lineāra telpa.

$$\begin{cases} V \leq L \\ W \leq L \end{cases} \implies V \cap W \leq L.$$

PIERĀDĪJUMS $\mathbf{u} \in V \cap W \iff \begin{cases} \mathbf{u} \in V \\ \mathbf{u} \in W \end{cases}.$

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in V \cap W \\ \mathbf{u}' \in V \cap W \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{u} + \mathbf{u}' \in V, \mathbf{u} + \mathbf{u}' \in W \\ \lambda\mathbf{u} \in V, \lambda\mathbf{u} \in W \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \mathbf{u} + \mathbf{u}' \in V \cap W \\ \lambda\mathbf{u} \in V \cap W. \end{cases} \blacksquare$$

1.3. piezīme. Teorēmu var vispārināt uz jebkuras apakštelpu kopas šķēlumu:

$$\forall\ i : V_i \leq L \implies \bigcap_i V_i \leq L.$$

1.4. piezīme. Apakštelpu apvienojums var nebūt apakštelpa. Var apskatīt piemērus ar plaknes vektoru telpu.

$V, W \leq L$. Definēsim kopu $V + W \subseteq L$ (V un W *summu*) ar šādu īpašību:

$$V + W = \{\mathbf{l} \in L | \exists\ \mathbf{v} \in V, \exists\ \mathbf{w} \in W : \mathbf{l} = \mathbf{v} + \mathbf{w}\}.$$

Divu apakštelpu summas jēdzienu var vispārināt uz galīga skaita apakštelpu summu. $V_i \leq L,\ 1 \leq i \leq n$. Definēsim kopu $\sum_{i=1}^n V_i \subseteq L$

ar šādu īpašību:

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \{\mathbf{l} \in L | \forall\ i\ \exists\ \mathbf{v}_i \in V_i : \mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i\}.$$

Īpašības:

- $V + W = W + V$,
- $(V + W) + Z = V + (W + Z)$.

1.2. piemērs. Plaknes vektori. Monomu apakštelpas.

1.4. teorēma. L - lineāra telpa.

$$\begin{cases} V \leq L \\ W \leq L \end{cases} \Longrightarrow V + W \leq L.$$

PIERĀDĪJUMS

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in V + W \\ \mathbf{u}' \in V + W \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w},\ \text{kur } \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W \\ \mathbf{u}' = \mathbf{v}' + \mathbf{w}',\ \text{kur } \mathbf{v}' \in V, \mathbf{w}' \in W \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \mathbf{u} + \mathbf{u}' = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + (\mathbf{v}' + \mathbf{w}') = \underbrace{(\mathbf{v} + \mathbf{v}')}_{\in V} + \underbrace{(\mathbf{w} + \mathbf{w}')}_{\in W} \in V + W \\ \lambda\mathbf{u} = \lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \underbrace{\lambda\mathbf{v}}_{\in V} + \underbrace{\lambda\mathbf{w}}_{\in W} \in V + W. \end{cases}$$

■

1.5. piezīme. Teorēmu var vispārināt uz jebkuras apakštelpu kopas summu:

$$\forall\, i : V_i \le L \implies \sum_i V_i \le L.$$

1.4. Lineārais slēgums

1.4.1. Lineārās kombinācijas

Ja ir doti LT L elementi $\mathbf{l}_1, ..., \mathbf{l}_n$, tad par to *lineāru kombināciju ar koeficientiem* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sauc L elementu

$$\lambda_1\mathbf{l}_1 + ... + \lambda_n\mathbf{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\mathbf{l}_i.$$

Ja vismaz viens no $\lambda_1, ..., \lambda_n$ nav vienāds ar 0, tad lineāro kombināciju sauc par netriviālu (pretējā gadījumā par triviālu).

1.3. piemērs. Viena elementa kopas $\{\mathbf{l}\}$ lineārās kombinācijas - $\lambda\mathbf{l}$. Vektori.

1.4.2. Lineārais slēgums

$X \subseteq L$. Visu X galīgu apakškopu elementu lineāru kombināciju kopu sauc par X *lineāro slēgumu*, apzīmē ar $\langle X \rangle$.

Vienkāršākās īpašības:

- $X \subseteq \langle X \rangle$;
- $\langle \{\mathbf{0}\} \rangle = \{\mathbf{0}\}$;
- $\langle \{\mathbf{l}\} \rangle = \{\mathbf{x} \in L | \mathbf{x} = \mu\mathbf{l}, \text{ kur } \mu \in k\}$;
- $\langle L \rangle = L$.

1.5. teorēma. *L - LT, $X \subseteq L$.*

1. $\langle X \rangle \leq L$.
2. $X \leq L \implies \langle X \rangle = X$.
3. $\left\{ \begin{array}{l} X \subseteq V \\ V \leq L \end{array} \right. \implies \langle X \rangle \leq V$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \in \langle X \rangle \\ \mathbf{u}' \in \langle X \rangle \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} = \sum_i \mu_i \mathbf{x}_i, \text{ kur } \mathbf{x}_i \in X \\ \mathbf{u}' = \sum_i \mu_i' \mathbf{x}_i', \text{ kur } \mathbf{x}_i' \in X \end{array} \right. \implies$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} + \mathbf{u}' = \sum_i \mu_i \mathbf{x}_i + \sum_i \mu_i' \mathbf{x}_i' \in \langle X \rangle \\ \lambda \mathbf{u} = \lambda \Big(\sum_i \mu_i \mathbf{x}_i \Big) = \sum_i (\lambda \mu_i) \mathbf{x}_i \in \langle X \rangle \end{array} \right.$$

2. $X \subseteq \langle X \rangle$. Jāpierāda, ka $\langle X \rangle \subseteq X$.

$\mathbf{u} \in \langle X \rangle \implies \mathbf{u} = \sum_i \mu_i \mathbf{x}_i$, kur $\mathbf{x}_i \in X$.

$X \leq L \implies \sum_i \mu_i \mathbf{x}_i \in X \implies \mathbf{u} \in X$.

3.$\mathbf{u} \in \langle X \rangle \implies \mathbf{u} = \sum_i \mu_i \mathbf{x}_i$, kur $\mathbf{x}_i \in X$.

$X \subseteq V \implies \sum_i \mu_i \mathbf{x}_i \in V \implies \mathbf{u} \in V$.■

1.4.3. Veidotājsistēmas

$X \subseteq L$ sauc par L *veidotājsistēmu (ğenerējošo kopu)*, ja $\langle X \rangle = L$.

1.4. piemērs. k^n veidotājsistēma var būt $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, kur

$$\mathbf{e}_i = \underbrace{(0, ..., 1, ..., 0)}_{\text{1 i-tajā vietā}}.$$

$$(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i :$$

$\mathcal{M}at(m, n, k)$ veidotājsistēma $\mathcal{B} = \{\mathbf{E}_{11}, ..., \mathbf{E}_{mn}\}$:

$$\mathbf{A} = \sum_{i,j} a_{ij} \mathbf{E}_{ij}.$$

2. 12.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

12.1 Noteikt, vai dotās kopas ir LT:

(a) plaknes vektori, kuru galapunkti atrodas pirmajā kvadrantā;

(b) $m \times n$ matricas ar fiksētu rangu r;

(c) $S \subseteq \mathbb{R}^4$, $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = x_3, x_2 = x_4)\}$.

12.2 Noteikt, vai LT L apakškopa V ir L apakštelpa:

(a) $L = \mathbb{R}^2$ (plaknes vektori), V - vektori, kuru galapunkti ir uz līknes $y = x^3$,

(b) $L = \mathbb{R}^n$, V - virknes, kuru visi elementi ir veseli skaitļi,

(c) $L = \mathcal{M}at(m, n, k)$, V - augšēji trijstūrveida matricas,

(d) $L = \mathbb{R}[X]$, $L = \{f | \deg(f) \geq 2\}$.

12.3 Dotas LT V un W, atrast $V \cap W$.

(a) $V, W \leq \mathbb{R}^3$, $V = \{\mathbf{v} | \mathbf{v} = (x, y, 0), \forall\ x, y\}$,
$W = \{\mathbf{w} | \mathbf{w} = (0, y, z), \forall\ y, z\}$;

(b) $V, W \leq \mathcal{M}at(m, n, \mathbb{R})$, V - augšēji trijstūrveida matricas, W - apakšēji trijstūrveida matricas;

(c) $V_s, V_t \leq \mathbb{R}[X]$, $s \neq t$, $V_a = \{f | f(a) = 0\}$.

12.4 Dotas apakštelpas V un W, atrast $V + W$.

(a) $V, W \leq \mathbb{R}^2$, $V = \langle(1, 0)\rangle$, $W = \langle(1, 1)\rangle$,

(b) $V, W \leq \mathcal{M}at(2, \mathbb{R})$, $V = \langle \mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{12}\rangle$, $W = \langle \mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{21}\rangle$,

12.5 Noteikt vai elements $\mathbf{l}$ pieder lineārajam slēgumam S.

(a) $S = \langle(0, 1, 2), (-1, 3, 1)\rangle$, $\mathbf{l} = (4, -9, 10)$, $L = \mathbb{R}^3$,

(b) $S = \langle X - 1, X^2 - 1\rangle$, $\mathbf{l} = X + 1$, $L = \mathbb{R}[X]$,

(c) $S = \langle \mathbf{E}_{11} + \mathbf{E}_{22}, \mathbf{E}_{22} + \mathbf{E}_{33}\rangle$, $\mathbf{l} = \mathbf{E}_3$, $L = \mathcal{M}at(3, \mathbb{R})$.

12.6 Atrast kādu LT L galīgu veidotājsistēmu.

(a) L - simetrisku $n \times n$ matricu telpa,

(b) L - homogēnas LVS

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0$$

atrisinājumu telpa, virs $\mathbb{Q}$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

12.7 $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n, \mathbb{Q})$ sauc par

- *pusmağisku kvadrātu*, ja visu rindu un kolonnu elementu summas ir vienādas,
- *mağisku kvadrātu*, ja visu rindu, kolonnu un abu diagonāļu elementu summas ir vienādas.

(a) Pierādīt, ka abu veidu mağiskie kvadrāti veido lineāras apakštelpas LT $\mathcal{M}at(n, \mathbb{Q})$.

(b) Atrast galīgas veidotājsistēmas abu veidu mağisko kvadrātu LT gadījumos, kad $n \in \{2, 3, 4, ...\}$.