DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

11.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

1. Determinanta īpašības **5**
1.1. Definīcijas korektuma pierādījums 5
1.1.1. Determinanta funkcijas vienīgums 5
1.1.2. Determinanta rekursīvā definēšana 5
1.2. Izvirzījums pēc rindas vai kolonnas 9
1.3. Kombinatoriskā definīcija 10

2. Determinanta lietojumi **12**
2.1. Matricas invertējamība 12
2.2. Inversās matricas atrašana 12
2.3. Krāmera formulas 13
2.4. Ģeometriskā interpretācija 15

3. 11.mājasdarbs **16**
3.1. Obligātie uzdevumi 16
3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi 18

Lekcijas mērķis:

- apgūt matricu determinanta īpašības un lietojumus.

Lekcijas kopsavilkums:

- determinantu var definēt rekursīvi, tas pierāda pirmās definīcijas korektumu,
- var pierādīt dažas jaunas determinanta īpašības,
- determinantus var izmantot matricu invertēšanā, LVS risināšanā un ģeometrijā.

Svarīgākie jēdzieni: determinanta rekursīvā definīcija (determinanta izvirzījums pēc pirmās kolonnas), permutācijas paritāte, determinanta kombinatoriskā definīcija, *ap* (*algebriskā papildinājuma*) matrica.

Svarīgākie fakti un metodes: determinanta vienīgums, determinants ar vienu nenulles elementu rindā, determinanta izmaiņa mainot vienu elementu, determinanta definīcijas korektums, Laplasa izvirzījums pēc rindas vai kolonnas, izvirzījuma ortogonalitātes īpašība, inversās matricas atrašana ar *ap* matricas metodi, Krāmera formulu metode, determinanta ğeometriskā interpretācija.

1. Determinanta īpašības

1.1. Definīcijas korektuma pierādījums

1.1.1. Determinanta funkcijas vienīgums

1.1. teorēma. Eksistē ne vairāk kā viena funkcija det, kas apmierina definīcijas aksiomas.

PIERĀDĪJUMS
$\mathbf{A} \notin GL(n,k) \implies \det(\mathbf{A}) = 0.$

$\mathbf{A} \in GL(n,k) \implies \mathbf{A} = \mathbf{P}_1 ... \mathbf{P}_l$, kur $\mathbf{P}_i$ - elementāras matricas $\implies \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{P}_1) ... \det(\mathbf{P}_l)$ - viennozīmīgi noteikts skaitlis. ■

1.1.2. Determinanta rekursīvā definēšana

Ar ko ir vienāds determinants, ja matricai kādā rindā vai kolonnā ir tikai viens nenulles elements?

1.2. teorēma.

$$\det \mathbf{A} = \det \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \mathbf{r}_1 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}' \end{array}\right] = a_{11} \det \mathbf{A}'.$$

PIERĀDĪJUMS Pielikumā. ■

1.1. piezīme. No īpašības $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$ seko analoģisks apgalvojums matricai $\left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{k}_1 & \mathbf{A}' \end{array}\right]$.

1.1. piemērs. $\det \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 5 & 7 \\ \hline 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{array}\right] = 2 \cdot \det \left[\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{array}\right] = 2 \cdot (-13).$

Kā mainās determinants, ja mainās tieši viens elements matricā?

1.3. teorēma. Dota $n \times n$ matrica $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \mathbf{r}_1 \\ \hline \mathbf{k}_1 & \mathbf{A}' \end{array}\right]$. Tad

$$\det \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} a_{11}+b & \mathbf{r}_1 \\ \hline \mathbf{k}_1 & \mathbf{A}' \end{array}\right]}_{\mathbf{A}+b\mathbf{E}_{11}} = \det \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \mathbf{r}_1 \\ \hline \mathbf{k}_1 & \mathbf{A}' \end{array}\right]}_{\mathbf{A}} + \det \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} b & \mathbf{r}_1 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}' \end{array}\right]}_{\mathbf{B}}.$$

PIERĀDĪJUMS Pielikumā. ■

Dota matrica $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$. Apzīmēsim ar $\mathbf{A}_{ij}$ matricu, ko iegūst no $\mathbf{A}$ izsvītrojot i-to rindu un j-to kolonnu.

1.2. piemērs. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$.

1.4. teorēma. Dota $n \times n$ matrica $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$. Tad

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1} \det \mathbf{A}_{i1}.$$

PIERĀDĪJUMS Pielikumā. ∎

1.2. piezīme. Iepriekšējā teorēma ļauj definēt determinantu *rekursīvi* - sākot no 1×1 līdz jebkuram izmēram.

1.3. piemērs.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \det[a_{22}] - a_{21} \det[a12] = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

1.5. teorēma. Determinanta funkcija ir definēta korekti.

PIERĀDĪJUMS Determinanta funkcija ir noteikta viennozīmīgi (ja eksistē).

Determinanta rekursīvā definīcija definē vienu funkciju, kas apmierina pirmo definīciju un nav atkarība no matricas izteikšanas elementāro matricu reizinājumā $\Longrightarrow$ sākotnējā definīcija arī ir korekta. ∎

1.2. Izvirzījums pēc rindas vai kolonnas

1.6. teorēma. (*Laplasa izvirzījuma formulas*)

$$\det(\mathbf{A}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Big((-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ij})\Big)}_{j\text{-tās kolonnas izvirzījums}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big((-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ij})\Big)}_{i\text{-tās rindas izvirzījums}}.$$

PIERĀDĪJUMS Pielikumā. ■

1.4. piemērs. Atradīsim determinantu izvirzot pēc 2.rindas:

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$(-1)1\cdot\det\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + 0\cdot\ldots + (-1)4\cdot\det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = -18.$$

1.7. teorēma. (*izvirzījuma ortogonalitātes īpašība*)

1. $$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Big((-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ik})\Big)}_{\text{kolonnas izvirzījums}} = 0,\ k \neq j.$$

2. $$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big((-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{kj})\Big)}_{\text{rindas izvirzījums}} = 0,\ k \neq i.$$

PIERĀDĪJUMS

1. Summā ir tādas matricas determinanta izvirzījums pēc j-tās kolonnas, kurai j-tā un k-tā kolonnas ir vienādas.

2. Summā ir tādas matricas determinanta izvirzījums pēc i-tās rindas, kurai i-tā un k-tā rindas ir vienādas. ■

1.3. Kombinatoriskā definīcija

σ - n elementu kopas $\{1, 2, ..., n\}$ permutācija - $\sigma \in \Sigma_n$.

Pieņemsim, ka σ sadalījums ciklos satur m ciklus. Lielumu $d(\sigma) = n - m$ sauc par σ *dekrementu.* Lielumu

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{d(\sigma)} = (-1)^{n-m}$$

sauc par σ *paritāti.*

1.8. teorēma. $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n,n}$. Tad

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}.$$

PIERĀDĪJUMS Pielikumā. ■

2. Determinanta lietojumi

2.1. Matricas invertējamība

$$\mathbf{A} \in GL(n,k) \iff \det \mathbf{A} \neq 0.$$

2.1. teorēma. $\mathbf{A} \in GL(n,k) \implies \det \mathbf{A}^{-1} = \det(\mathbf{A})^{-1}$.

PIERĀDĪJUMS
$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \implies \det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^{-1} = 1 \implies \det \mathbf{A}^{-1} = \det(\mathbf{A})^{-1}$.
■

2.2. Inversās matricas atrašana

$\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Definēsim *algebriskā papildinājuma* matricu

$$ap\mathbf{A} = [(-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ji}]_{n,n}.$$

2.1. piemērs. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $ap\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2.2. teorēma.

1. $\mathbf{A} \cdot ap\mathbf{A} = ap\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \cdot E_n$.
2. $\det \mathbf{A} \neq 0 \implies \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} ap\mathbf{A}$.

PIERĀDĪJUMS
1.
$[\mathbf{A} \cdot ap\mathbf{A}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}[ap\mathbf{A}]_{kj} =$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{k+j} \det \mathbf{A}_{jk} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \text{ja } i = j \\ 0, & \text{ja } i \neq j. \end{cases}$$

2. No pirmā apgalvojuma seko

$$\mathbf{A} \cdot \left(\frac{1}{\det \mathbf{A}} ap\mathbf{A} \right) = \mathbf{E}_n. \blacksquare$$

2.3. Krāmera formulas

Dota kvadrātveida LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Apzīmēsim ar $\mathbf{A}_j$ matricu, kuru iegūst no $\mathbf{A}$ aizvietojot j-to kolonnu ar $\mathbf{b}$.

2.3. teorēma. (*Krāmera formulas*)

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}.$$

PIERĀDĪJUMS

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \implies \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(ap\mathbf{A})\mathbf{b} =$

$$\frac{1}{\det \mathbf{A}} \sum_{i=1} [ap\mathbf{A}]_{ij} \mathbf{b}_j = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \underbrace{\sum_{i=1} (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ji} \mathbf{b}_j}_{\mathbf{A}_i \text{ izvirzījums} i\text{-tajā kolonnā}} . \blacksquare$$

2.2. piemērs. $\begin{cases} 2X_1 & -X_2 & = 4 \\ X_1 & +5X_2 & = 7 \end{cases}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{27}{11} \\ X_2 = \frac{10}{11}. \end{cases}$$

2.4. Ģeometriskā interpretācija

2×2 gadījumā determinantu var interpretēt kā paralelograma laukumu.

Doti 2 vektori $\vec{v} = (x, y)$ un $\vec{u} = (x', y')$. Tad paralelograma, kas ir "uzvilkts" uz šiem vektoriem, laukums $S = |\det \begin{bmatrix} x & y \\ x' & y' \end{bmatrix}|$.

3×3 gadījumā determinantu var interpretēt kā paralēlskaldņa tilpumu.

3. 11.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

11.1 Atrast determinantus izmantojot izvirzījumu pēc rindas vai kolonnas.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

(b)

(c) $\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & z & t \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} a & b & & \\ & a & b & \\ & & a & b \\ b & & & a \end{bmatrix}$

11.2 Atrast determinantu izmantojot rekurentās sakarības.

$$\begin{bmatrix} a & 1 & & \dots & \\ 1 & a & 1 & \dots & \\ & 1 & a & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ & & & 1 & a \end{bmatrix}.$$

11.3 Atrast $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ izmantojot *ap* matricas metodi.

11.4 Atrisināt LVS izmantojot Krāmera formulas.

(a) $\begin{cases} 3X_1 & -X_2 & = 4 \\ 2X_1 & +5X_2 & = 8. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} X_1 & -X_2 & +2X_3 & = -3 \\ 2X_1 & +3X_2 & -6X_3 & = 4 \\ X_1 & -3X_2 & -2X_3 & = 9. \end{cases}$

11.5 Matricām $\mathbf{A}$ un $\mathbf{A}^{-1}$ visi elementi ir veseli skaitļi. Ar ko var būt vienāds det $\mathbf{A}$?

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

11.6 Atrast determinantus.

(a) $$\begin{bmatrix} d & a & ... & a \\ b & d & ... & a \\ ... & ... & ... & ... \\ b & b & ... & d \end{bmatrix};$$

(b) $$\begin{bmatrix} 0 & a & a & ... & a \\ a & 0 & b & ... & b \\ a & b & 0 & ... & b \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a & b & b & ... & 0 \end{bmatrix};$$

(c) $[(a_i + a_j)^{n-1}]_{n,n}$.