DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Lineārā algebra I

10.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt matricu determinanta jēdzienu, vienkāršākās īpašības un aprēķināšanas metodes.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt funkciju - *determinantu*, kas invertējamai matricai piekārto nenulles skaitli;
- var pētīt determinantu īpašības un izstrādāt algoritmu determinanta atrašanai.

Svarīgākie jēdzieni: determinants.

Svarīgākie fakti un metodes: elementāro matricu determinanti, determinanta īpašības, mazu izmēru matricu determinantu formulas, determinanta aprēķināšana ar triangulācijas metodi.

1. Matricas determinants

Kvadrātveida matricām var definēt un pētīt funkciju, kas kalpo kā invertējamības indikators.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ var definēt *determinanta* funkciju

$$\det : Mat(n,k) \longrightarrow\ k.$$

$$\mathbf{A} \longrightarrow \det(\mathbf{A}).$$

$\det(\mathbf{A})$ ir polinomiāla funkcija no matricas elementiem.

1.1. Definīcija

Determinanta definēšanā ir vismaz divas pieejas:

- vēsturiskā pieeja - determinants tiek definēts kā matricas elementu funkcija, kas parādās saucējā, risinot kvadrātveida LVS.
- aksiomātiskā pieeja - determinants tiek definēts kā matricas elementu funkcija, kas apmierina noteiktas īpašības.

1.1.1. Vēsturiskā pieeja

Risinot kvadrātveida LVS, var ievērot, ka nezināmie ir racionālas funkcijas no sistēmas koeficientiem un brīvajiem locekļiem.

$\underline{n = 1}$

LVS $\{\ a_{11}X_1 = b_1$ $\quad \exists$ atrisinājums, ja $a_{11} \neq 0$: $X_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$.

Varam definēt $\det \left[\ a_{11}\ \right] = a_{11} \implies X_1 = \frac{\det[b_1]}{\det[a_{11}]}$.

$\underline{n = 2}$

Risināsim LVS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \iff \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = b_2. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ \hline a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & a_{12}/a_{11} & b_1/a_{11} \\ \hline a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & a_{12}/a_{11} & b_1/a_{11} \\ \hline 0 & a_{22} - a_{21}(a_{12}/a_{11}) & b_2 - a_{21}(b_1/a_{11}) \end{array}\right].$$

$$X_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$
$$X_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

$\exists$ tieši viens atrisinājums, ja $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$:

Varam definēt $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \implies$

$$X_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}, X_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}$$

1.1. piemērs. $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3.$

$n = 3$

Ja atkārtotu risinājumu 3×3 LVS, iegūtu šādu rezultātu:

$$X_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, \text{ kur}$$

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

1.2. piemērs. $\det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} =$

$$2 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot 2 = -21.$$

Šādā veidā funkcijas det var definēt visiem izmēriem n. Līdz 20.gs sākumam determinanta funkcija bija galvenā tehnoloģija LVS pētīšanai. Mūsdienās matricu algebra ir svarīgāka.

1.1.2. Motivācijas

Pamatapsvērumi

Ņemot vērā visu LVS risināšanas un matricu algebras pieredzi, var minēt šādus apsvērumus kvadrātveida matricas $\mathbf{A}$ "determinanta" funkcijas definēšanai:

- "determinanta" funkcijas vērtībām jāsakrīt ar saucēju funkcijām nezināmo formulās vispārīgajā gadījumā:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \implies \mathbf{x} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix},$$

- LVS $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ir viennozīmīgi atrisināma $\iff$ $\mathbf{A}$ ir invertējama, tāpēc var pieprasīt šādu īpašību

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \mathbf{A} \text{ ir invertējama.}$$

Multiplikativitāte

Kādai būtu jābūt saistībai starp $\det(\mathbf{AB})$, $\det(\mathbf{A})$ un $\det(\mathbf{B})$?

Sistēmu $(\mathbf{AB})\mathbf{x} = \mathbf{b}$ var risināt divos veidos:

- uzreiz, tad nezināmo formulās saucējs būs det($\mathbf{AB}$);
- divos soļos:

  pirmais solis- $\mathbf{ABx} = \mathbf{A}(\mathbf{Bx}) \Longrightarrow$ veicot nezināmo substitūciju $\mathbf{x} \dashrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{Bx}$ iegūsim sistēmu

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Ay} = \mathbf{b} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Bx} \end{array} \right. ,$$

  atrisinot vienādojumu attiecībā uz $\mathbf{y}$, saucējos iegūsim det($\mathbf{A}$):

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix},$$

  otrais solis-

  risinot attiecībā uz $\mathbf{x}$ vienādojumu

$$\mathbf{Bx} = \mathbf{y} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix},$$

iegūsim

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix}$$

var pieņemt, ka jāizpildās sakarībai

$$\frac{1}{\det \mathbf{AB}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \frac{1}{\det \mathbf{B}} \implies \det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.$$

1.1.3. Speciālgadījumi

<u>Mazas n vērtības</u>
Mazām n vērtībām var pieņemt šādas det definīcijas:

- $n = 1 \implies \det \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} = a_{11}$;
- $n = 2 \implies \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

- $n = 3 \implies$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

<u>Elementārās matricas</u>

Atradīsim pieņemamas vērtības elementāro matricu determinantiem, uzskatot, ka determinants ir multiplikatīva funkcija un atšķirīgs no 0 elementārajām matricām.

Vienības matrica

$\mathbf{E}_n\mathbf{E}_n = \mathbf{E}_n \implies \det(\mathbf{E}_n\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{E})\det(\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{E}_n) \implies \det(\mathbf{E}_n) \in \{0, 1\} \implies \det(\mathbf{E}_n) = 1.$

Pirmā veida elementārā pārveidojuma matrica

$\mathbf{R}_{pq}^2 = \mathbf{E}_n \implies \det(\mathbf{R}_{pq})^2 = \det(\mathbf{E}_n) = 1 \implies$
$\det(\mathbf{R}_{pq}) \in \{1, -1\}.$

1.1. piezīme. Apskatot 2×2 un 3×3 matricu gadījumu, redzam, ka jāņem vērtība -1.

Otrā veida elementārā pārveidojuma matrica
Apzīmēsim $\det(\mathbf{R}_p(\lambda))$ ar $f(\lambda)$.

$$\begin{cases} \mathbf{R}_p(\lambda)\mathbf{R}_p(1/\lambda) = \mathbf{E}_n \\ \mathbf{R}_p(\lambda)\mathbf{R}_p(\mu) = \mathbf{R}_p(\lambda\mu) \end{cases} \Longrightarrow f(\lambda)f(\mu) = f(\lambda\mu).$$

1.2. piezīme. Der jebkura pakāpes funkcija $f(\lambda) = \lambda^m$, $m \in \mathbb{N}$. Apskatot 2×2, 3×3 un trijstūrveida matricas, redzam, ka jādefinē $f(\lambda) = \lambda$.

Trešā veida elementārā pārveidojuma matrica
Apzīmēsim $\det(\mathbf{R}_{pq}(\lambda))$ ar $g(\lambda)$.
$\mathbf{R}_{pq}(\lambda)\mathbf{R}_{pq}(\mu) = \mathbf{R}_p(\lambda + \mu) \Longrightarrow g(\lambda)g(\mu) = g(\lambda + \mu)$.

1.3. piezīme. Der jebkura eksponentfunkcija funkcija $g(\lambda) = a^\lambda$, $a \in \mathbb{R}^+$. Apskatot trijstūrveida matricas, redzam, ka jāņem $a = 1 \Longrightarrow g(\lambda) = 1$.

1.1.4. Determinanta definīcija

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ definēsim $n \times n$ matricu determinanta funkciju

$$\det : Mat(n, k) \longrightarrow k$$

ar šādiem nosacījumiem:

1. $\mathbf{A}$ nav invertējama $\implies \det(\mathbf{A}) = 0$.
2. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.
3. $\det(\mathbf{E}_n) = 1$.
4. $\det(\mathbf{R}_{pq}) = -1$, $\forall\, p, q$.
5. $\det(\mathbf{R}_p(\lambda)) = \lambda$, $\forall\, p$, $\forall\, \lambda \in k$.
6. $\det(\mathbf{R}_{pq}(\lambda)) = 1$, $\forall\, p, q$, $\forall\, \lambda \in k$.

$\det \mathbf{A}$ var aprēķināt saskaņā ar šādu algoritmu:

- $\mathbf{A}$ nav invertējama $\implies \det \mathbf{A} = 0$;
- $\mathbf{A}$ ir invertējama, $\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 ... \mathbf{P}_l$, kur $\mathbf{P}_i$ ir elementāra matrica $\implies$

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{P}_1 ... \det \mathbf{P}_l.$$

Jāpierāda, ka definīcija ir korekta: ja matricu var izteikt kā elementāro matricu reizinājumu divos dažādos veidos, tad determinants no tā nav atkarīgs.

1.3. piemērs. $\mathbf{E} = \mathbf{R}_{pq}\mathbf{R}_{pq}$,$1 = (-1)(-1) = 1$.

1.1. teorēma. $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{Q}_i$ - elementāras matricas.

$$\mathbf{P}_1 ... \mathbf{P}_u = \mathbf{Q}_1 ... \mathbf{Q}_v \implies \det(\mathbf{P}_1) ... \det(\mathbf{P}_u) = \det(\mathbf{Q}_1) ... \det(\mathbf{Q}_v).$$

1.2. Īpašības

1.2. teorēma.

1. Mainot vietām divas matricas rindas vai kolonnas, matricas determinants maina zīmi.
2. Ja matricā ir divas vienādas rindas vai kolonnas, tad matricas determinants ir vienāds ar 0.

3. Reizinot matricas rindu vai kolonnu ar λ, matricas determinants jāreizina ar λ.
4. Pieskaitot matricas rindai vai kolonnai citu rindu vai kolonnu, reizinātu ar λ, determinants nemainās.
5. Trijstūrveida matricas determinants ir vienāds ar galvenās diagonāles elementu reizinājumu.
6. Transponēšana nemaina determinantu.

PIERĀDĪJUMS

1. $\det(\mathbf{R}_{pq}\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{R}_{pq}) = \det(\mathbf{R}_{pq})\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A})$.

2. $\mathbf{A}$ satur divas vienādas rindas ar indeksiem p un q $\Longrightarrow$ $\mathbf{R}_{pq}\mathbf{A} = \mathbf{A} \Longrightarrow -\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \Longrightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$.

3. $\det(\mathbf{R}_p(\lambda)\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{R}_p(\lambda)) = \det(\mathbf{R}_p(\lambda))\det(\mathbf{A}) = \lambda\det(\mathbf{A})$.

4. $\det\Big(\mathbf{R}_{pq}(\lambda)\mathbf{A}\Big) = \det\Big(\mathbf{A}\mathbf{R}_{pq}(\lambda)\Big) = \det\Big(\mathbf{R}_p(\lambda)\Big)\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$.

5. Apskatīsim augšēji trijstūrveida matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$\exists i : a_{ii} = 0 \implies$ galveno rūtiņu skaits $\mathbf{A}$ pakāpienveida formā ir mazāks kā $n \implies r(\mathbf{A}) < n \implies \det(\mathbf{A}) = 0 = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.

Pieņemsim, ka $\forall\ i : a_{ii} \neq 0$.

Veiksim REP virkni $\mathbf{R}_1(\frac{1}{a_{11}})$, $\mathbf{R}_2(\frac{1}{a_{22}})$,...,$\mathbf{R}_n(\frac{1}{a_{nn}})$. Iegūsim augšēji trijstūrveida matricu $\mathbf{A}'$, kurai uz galvenās diagonāles ir 1:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & ... & a'_{1n} \\ 0 & 1 & ... & a'_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det(\mathbf{A}') = \det\left(\mathbf{R}_1(\frac{1}{a_{11}})\mathbf{R}_2(\frac{1}{a_{22}})...\mathbf{R}_n(\frac{1}{a_{nn}})\mathbf{A}\right) =$$
$$\det\left(\mathbf{R}_1(\frac{1}{a_{11}})\right)\det\left(\mathbf{R}_2(\frac{1}{a_{22}})\right)...\det\left(\mathbf{R}_n(\frac{1}{a_{nn}})\right)\det(\mathbf{A}) =$$
$$\frac{1}{a_{11}}\frac{1}{a_{22}}...\frac{1}{a_{nn}}\det(\mathbf{A})$$

$\Longrightarrow$ $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}...a_{nn}\det(\mathbf{A}')$.

Veicot ar $\mathbf{A}'$ KEP "no kreisās puses uz labo" sākot ar pēdējo rindu, iegūsim vienības matricu:

$\mathbf{A}'\mathbf{K}_{n-1}\mathbf{K}_{n-2}...\mathbf{K}_1 = \mathbf{E}_n \Longrightarrow$
$\det(\mathbf{A}')\det(\mathbf{K}_{n-1})\det(\mathbf{K}_{n-2})...\det(\mathbf{K}_1) = \det(\mathbf{E}_n) = 1 \Longrightarrow$
$\det(\mathbf{A}') = 1 \Longrightarrow \det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.

6. $\mathbf{A} \notin GL(n,k) \iff \mathbf{A}^T \notin GL(n,k) \Longrightarrow \det(\mathbf{A}) = 0 \iff \det(\mathbf{A}^T) = 0$.

$\mathbf{A} \in GL(n,k) \implies \mathbf{A} = \mathbf{P}_1 ... \mathbf{P}_l$, kur $\mathbf{P}_i$ ir elementārās matricas $\implies \mathbf{A}^T = \mathbf{P}_l^T ... \mathbf{P}_1^T \implies \det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{P}_l^T) ... \det(\mathbf{P}_1^T)$.

Ar visu gadījumu pārbaudi var pārliecināties, ka $\forall$ elementārai matricai $\mathbf{P}$, izpildās $\det(\mathbf{P}) = \det(\mathbf{P}^T) \implies$

$\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{P}_l^T) ... \det(\mathbf{P}_1^T) = \det(\mathbf{P}_l) ... \det(\mathbf{P}_1) = \det(\mathbf{A})$. ■

1.3. Determinanta aprēķināšanas algoritmi

1.3.1. Mazu izmēru matricas

Ja $n \in \{1, 2, 3\}$, tad $n \times n$ matricas $\mathbf{A}$ determinantu var atrast izmantojot zināmās formulas.

1.4. piemērs. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 = -7.$

1.3.2. Triangulācijas algoritms

A - $n \times n$ matrica.

$\det(\mathbf{A})$ var aprēķināt saskaņā ar šādu algoritmu:

1. ar REP un KEP palīdzību pārveidot **A** trijstūrveida formā:
$$\mathbf{A} \to \mathbf{RAK} = \mathbf{T};$$
2. atrast $\det(\mathbf{T}) = t_{11}t_{22}...t_{nn}$;
3. izmantojot vienādību
$$\det(\mathbf{T}) = \det(\mathbf{R})\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{K})$$
atrast
$$\det(\mathbf{A}) = \frac{\det(\mathbf{T})}{\det(\mathbf{R})\det(\mathbf{K})}.$$

2. 10.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

10.1 Atrast 2×2 matricu determinantus izmantojot summu formulas.

(a) $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1-i & 2+3i \\ 3+2i & -4i \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & xy \end{bmatrix}$.

10.2 Atrast 3×3 matricu determinantus izmantojot summu formulas.

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 7 \\ 8 & 7 & -8 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$.

10.3 Atrast matricu determinantus izmantojot triangulācijas algoritmu.

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

10.4 Atrast matricu determinantus.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ t & 0 & y & 0 \\ 0 & u & 0 & z \\ 0 & 0 & v & 0 \end{bmatrix}$;

(b) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 & x \\ 1 & 1 & ... & x & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x & ... & 1 & 1 \\ x & 1 & ... & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

10.5 Kāda var būt 3×3 matricas determinanta maksimālā vērtība, ja matricas elementi pieder kopai

(a) $\{0, 1\}$;
(b) $\{-1, 1\}$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

10.6 Atrast matricu determinantus.

(a) $$\begin{bmatrix} 1 + x_1 & 1 + x_1^2 & ... & 1 + x_1^n \\ 1 + x_2 & 1 + x_2^2 & ... & 1 + x_2^n \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 + x_n & 1 + x_n^2 & ... & 1 + x_n^n \end{bmatrix};$$

(b) $$\begin{bmatrix} 1 & x & \ldots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & \ldots & x^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & x^2 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$