*DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE*
*Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte*
*Matemātikas katedra*
*Bakalaura studiju programma "Matemātika"*

*Studiju kurss*

# Lineārā algebra I

## 1.lekcija

*Docētājs: Dr. P. Daugulis*

*2009./2010.studiju gads*

# Saturs

**Lekcijas mērķis:**

- apgūt kopu teorijas pamatus.

**Lekcijas kopsavilkums:**

- lietderīgi ir pētīt dažādas dabas objektu kopumus - kopas,
- var definēt dažādas kopu operācijas un pētīt to īpašības.

**Svarīgākie jēdzieni:** kopa, multikopa, Eilera diagramma, kopu vienādība, apakškopa, bitu vektors, pakāpes kopa, papildinājums, apvienojums, šķēlums, starpība, simetriskā starpība.

**Svarīgākie fakti un metodes:** apakškopu īpašības, kopu operāciju īpašības, kopu vienādības pierādīšanas metodes.

# 1. Kopu teorijas pamati

## 1.1. Pamatdefinīcijas

*Kopa* ir aksiomātisks jēdziens, to definē aprakstoši vai ar aksiomu sistēmām.

Kopa ir jebkuras dabas dažādu objektu (kopas elementu) kopums, kas tiek uzskatīts par vienotu veselu.

Kopai un tās elementiem piemīt šādas raksturīgas īpašības:

- visi kopas elementi tiek uzskatīti par dažādiem;
- starp kopas elementiem nav uzdota nekāda struktūra (kārtība, hierarhija, sakarība u.c.).

*Multikopa* ir elementu kopums, kurā elementi var atkārtoties. Ja kāds elements multikopā atkārtojas $n$ reizes, tad saka, ka šī elementa *multiplicitāte* ir vienāda ar $n$.

Ja objekts $a$ tiek uzskatīts par kopas $A$ elementu, tad saka, ka $a$ pieder kopai $A$ vai, ka $A$ satur elementu $a$ ($a \in A$). Ja objekts $a$ netiek uzskatīts par kopas $A$ elementu, tad saka, ka $a$ nepieder kopai $A$ ($a \notin A$).

Kopu, kas nesatur nevienu elementu, sauc par *tukšu kopu* ($\emptyset$).

Ja kopa $A$ satur galīgu skaitu elementu, tad to sauc par *galīgu kopu*un tās elementu skaitu apzīmē ar $|A|$, pretējā gadījumā kopu sauc par *bezgalīgu kopu*.

Bieži, strādājot ar ar noteiktas dabas elementu kopām, ir lietderīgi fiksēt arī visu iespējamo šīs dabas elementu kopu - *universu*, universs var mainīties atkarībā no situācijas.

**1.1. piemērs.** Kopu piemēri:

- visu naturālu skaitļu kopa,
- visu naturālu skaitļu kopa, kas ir mazāki nekā 10,

- visu alfabētu burtu kopa,
- visu plaknes punktu kopa.

**1.2. piemērs.** Multikopu piemēri:

- visu cilvēku vārdu multikopa (dažiem cilvēkiem ir kopīgi vārdi, tāpēc tie atkārtojas),
- visu kāda vielas daudzuma atomu multikopa (makroskopisks priekšmets sastāv no dažu ķīmisko elementu atomiem, kas atkārtojas "neskaitāmas" reizes).

## 1.2. Kopu uzdošanas veidi

### 1.2.1. Elementu pārskaitīšana

Kopas var uzdot aprakstot (pārskaitot) visus kopas elementus saraksta veidā (šī metode visbiežāk tiek izmantota, ja kopas elementu skaits ir mazs), šajā gadījumā kopas elementus apvieno ar figūriekavām;

piemēram, pieraksts

$$A = \{a, b, c\}$$

uzdod kopu $A$, kas satur 3 elementus $a, b, c$.

Gadījumā, ja kopa ir bezgalīga, lieto šādu pierakstu:

$$A = \{a_\alpha\}_{\alpha \in I},$$

kur $\alpha$ ir indekss, ar kura starpniecību tiek pārskaitīti kopas elementi, un $I$ ir šī indeksa vērtību kopa.

### 1.2.2. Definējošā īpašība vai algoritms

Kopas var uzdot aprakstot

- kopas elementus raksturojošo īpašību,
- algoritmisku procedūru.

Visbiežāk raksturojošo īpašību ieslēdz figūriekavās, kurās ir atdaloša vertikāla svītra, pa kreisi no šīs svītras tiek uzdots universs, pa labi no atdalošās svītras tiek uzdota īpašība, kas piemīt uzdodamās kopas elementiem.

**1.3. piemērs.** $A = \{n \in \mathbb{N} | n > 10\}$ - naturālo skaitļu kopas apakškopa, kas satur visus naturālus skaitļus, kas ir lielāki nekā 10.

### 1.2.3. Operāciju rezultāts

Kopu var uzdot iegūstot to no iepriekš uzdotām kopām veicot ar tām noteiktas darbības (operācijas).

### 1.2.4. Kopu vizualizācija

Populāra kopu vizualizācijas metode - *Eilera (Eilera-Venna) diagrammas*. Kopas tiek attēlotas kā plaknes apgabali. Šī metode var tikt pielietota, ja kopu skaits nav pārāk liels (2-4 kopas) un speciālgadījumos.

**1.4. piemērs.**

# 1.3. Kopu vienādība, apakškopas

## 1.3.1. Kopu vienādība

Kopas $A$ un $B$ sauc par vienādām ($A = B$), ja izpildās šāds noteikums:

$$\Big(a \in A \implies a \in B\Big) \text{ un } \Big(b \in B \implies b \in A\Big).$$

Citiem vārdiem sakot, kopas $A$ un $B$ nav atšķiramas viena no otras kā elementu kopumi.

Tukša kopa nav vienāda ne ar kādu netukšu kopu.

Ja $\exists\ c \in A$, tāds, ka $c \notin B$ vai $\exists\ d \in B$, tāds, ka $d \notin A$, tad kopas $A$ un $B$ nav vienādas ($A \neq B$).

## 1.3.2. Apakškopas

Kopa $A$ ir kopas $B$ *apakškopa* ($A \subseteq B$), ja izpildās šāds noteikums:

$$a \in A \implies a \in B.$$

Šādā gadījumā $B$ ir $A$ *aptverošā kopa*.

Tukša kopa ir jebkuras kopas (arī tukšas kopas) apakškopa.

Ja $A \subseteq B$ un $A \neq B$, tad saka, ka $A$ ir *īsta* $B$ apakškopa ($A \subset B$).

Apakškopas var uzdot *bitu vektoru* veidā: ja ir dota galīga aptverošā kopa vai universs $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, tad apakškopu $A \subseteq U$ uzdosim kā bināru virkni $(f_1, ..., f_n)$, kur

$$f_i = \begin{cases} 1, & \text{ja } u_i \in A \\ 0, & \text{ja } u_i \notin A. \end{cases}$$

**1.5. piemērs.** Ja aptverošā kopa ir $\{a, b, c, d, e, f\}$, tad apakškopai $\{b, c, f\}$ atbilst bitu vektors 011001.

**1.1. teorēma.** Apakškopu īpašības:

- $A \subseteq A$ (refleksīvā īpašība);
- $A \subseteq B$ un $B \subseteq C \implies A \subseteq C$ (tranzitīvā īpašība);

- $A \subseteq B$ un $B \subseteq A \implies A = B$ (antisimetrijas īpašība);
- Jebkura kopa ir apakškopa tai atbilstošajā universā.

Kopas $A$ visu apakškopu kopu apzīmē pierakstu $\mathcal{P}(A)$ un sauc par šīs kopas *būleānu* (Boole) vai *pakāpes kopu.*

**1.6. piemērs.** $A = \{a, b, c\}$. Kopai $A$ ir 8 apakškopas:

- tukšā kopa $\emptyset$,
- viena elementa apakškopas: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$,
- divu elementu apakškopas $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$,
- $A = \{a, b, c\}$.

## 1.4. Operācijas ar kopām

### 1.4.1. Papildinājums

Par kopas $A$ *papildinājumu* sauc kopu

$$A' = \overline{A} = \{u \in U | u \notin A\}.$$

Par kopas papildinājumu ir jādomā kā par kopu, kas paliek pāri, ja no universa "izmet ārā" visus kopas elementus.

**1.7. piemērs.** Ja $A$ ir visu pāra skaitļu kopa un $U = \mathbb{Z}$, tad $\overline{A}$ ir visu nepāra skaitļu kopa.

### 1.4.2. Apvienojums

Par divu kopu $A$ un $B$ *apvienojumu* sauc kopu

$$A \cup B = \{u \in U | u \in A \text{ vai } u \in B\}.$$

Par kopu apvienojumu ir jādomā kā par visu šo kopu elementu apvienošanu vienā kopā ignorējot atkārtojumus, kas var rasties, ja kopām ir kopīgi elementi.

Vispārinājums: dotas vairākas kopas $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, par šo kopu apvienojumu sauc kopu

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{u \in U | u \in A_\beta \text{ vismaz vienam } \beta \in I\}.$$

### 1.4.3. Šķēlums

Par divu kopu $A$ un $B$ *šķēlumu* sauc kopu

$$A \cap B = \{u \in U | u \in A \text{ un } u \in B\}.$$

Par kopu šķēlumu ir jādomā kā par šo kopu kopējo daļu.

Vispārinājums: dotas kopas $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, šo kopu šķēlums ir kopa

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{u \in U | u \in A_\beta \text{ katram } \beta \in I\}.$$

Ja $A \cap B = \emptyset$, tad saka, ka kopas $A$ un $B$ ir atdalītas jeb šķirtas.

### 1.4.4. Starpība

Par divu kopu $A$ un $B$ *starpību* sauc kopu

$$A \backslash B = \{u \in U | u \in A \text{ un } u \notin B\}.$$

Par divu kopu $A$ un $B$ starpību ir jādomā kā par kopu, kas paliek pāri, ja no $A$ "izmet ārā" visus elementus, kas pieder $B$.

Ievērosim, ka kopas papildinājums ir kopu starpības speciālgadījums:

$$\overline{A} = U \backslash A.$$

Ievērosim arī vienādību $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

### 1.4.5. Simetriskā starpība

Par divu kopu $A$ un $B$ *simetrisko starpību* sauc kopu

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

### 1.4.6. Kopu operāciju īpašības

**1.2. teorēma.** (kopu operāciju īpašības)

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ - *šķēluma un apvienojuma komutativitāte*;
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, - *šķēluma un apvienojuma asociativitāte*;

3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ - *distributivitāte*;
4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ - *dualitātes (De Morgāna) likumi;*
5. $\overline{\overline{A}} = A$ - *papildinājuma involūcija*;
6. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ - *šķēluma un apvienojuma idempotence*;
7. $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, $A = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$ - *sašķelšana*;
8. $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$ - *absorpcija*;
9. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup U = U$, $A \cap U = A$ - *dominēšana.*

## 1.5. Kopu vienādības pierādīšana

Kopu vienādības pierādīšana - svarīgs uzdevums, kas matemātiķiem ir bieži jārisina dažādos grūtības līmeņos. Kopu vienādību var pierādīt vai atspēkot izmantojot zemāk aprakstītās metodes.

### 1.5.1. Apakškopu iekļaušanas antisimetrijas īpašības izmantošana

Izmantojam zināmo kopu īpašību: $A \subseteq B$ un $B \subseteq A \implies A = B$.

### 1.5.2. Kopu operāciju īpašību izmantošana

Ja ir doti divi kopu operāciju pielietošanas rezultāti $f(A_1, ..., A_n)$ un $g(A_1, ..., A_n)$, tad vienādību $f = g$ var mēģināt pierādīt vai atspēkot pārveidojot vienu vai abas puses saskaņā ar kopu operāciju īpašībām.

**1.8. piemērs.** $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$.

### 1.5.3. Eilera diagrammu izmantošana

Nelielam kopu skaitam to operāciju rezultātus var vizualizēt izmantojot Eilera diagrammas un pierādīt, ka pētāmajām kopām atbilst vienādi apgabali.

### 1.5.4. Incidences tabulu vai elementāršķēlumu izmantošana (patstāvīgā lasīšana)

**1.9. piemērs.** Ja ir dota viena kopa $A$, tad

$$U = A \cap \overline{A}.$$

Ja ir dotas divas kopas $A_1$ un $A_2$, tad

$$U = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2}).$$

Apzīmēsim $A^1 = A$, $A^0 = \overline{A}$.

Ja ir dotas vairākas kopas $A_1, ..., A_n$, tad

- jebkuru kopu formā
$$A_1^{\epsilon_1} \cap A_2^{\epsilon_2} \cap ... \cap A_n^{\epsilon_n}$$
sauksim par *elementāršķēlumu*
- kopu $A_1, ..., A_n$ kopīgais universs ir vienāds ar visu elementāršķēlumu apvienojumu,

- divu dažādu elementāršķēlumu šķēlums ir tukša kopa,
- tādējādi elementāršķēlumi veido universa sadalījumu.

Elementa piederība vai nepiederība kopai $f(A_1, ..., A_n)$ ir atkarīga tikai no tā piederības vai nepiederības katrai no kopām $A_1, ..., A_n$.

Seko, ka

- $a \in f(A_1, ..., A_n)$ un $a \in E$, kur $E$ ir elementāršķēlums $\Longrightarrow$ $E \subseteq f(A_1, ..., A_n)$;
- $b \notin f(A_1, ..., A_n)$ un $a \in E'$, kur $E'$ ir elementāršķēlums $\Longrightarrow$ $E' \cap f(A_1, ..., A_n) = \emptyset$.

Seko, ka katra no kopām $f$ un $g$ ir dažu elementāršķēlumu apvienojums. Lai noteikti, vai $f = g$, ir jāpārbauda, vai $f$ un $g$ satur vienus un tos pašus elementāršķēlumus.

Lai noteiktu vai divas kopas $f(A_1, ..., A_n)$ un $g(A_1, ..., A_n)$ ir vienādas, var rīkoties saskaņā ar šādu algoritmu:

1. Uzzīmēt tabulu, kuras rindas tiek indeksētas ar elementāršķēlumiem un kolonnas - ar pētāmajām kopām $f$ un $g$.
2. Rūtiņā, kas atbilst elementāršķēlumam $E$ un kopai $f$, ierakstīt 1, ja $E \subseteq f$ un 0 - ja $E \not\subseteq f$.
3. Salīdzināt rūtiņu vērtības pa rindām.

**1.10. piemērs.** Pierādīt distributīvo likumu.

# 2. 1.mājasdarbs

## 2.1. Obligātie uzdevumi

1.1 Dots universs $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ un tā apakškopas $A = \{a, c, d, g, h, i, j\}$ un $B = \{b, d, f, h, j\}$. Atrodiet bitu vektorus kopām $A$, $B$, $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $A \Delta B$.

1.2 Dota kopa $A = \{a, b, c, d\}$. Atrast visus iespējamās $A$ apakškopas.

1.3 Dotas kopa $A$ un $B$: $|A| = n$, $|B| = m$, $|A \cap B| = r$. Cik ir elementu kopā $A \cup B$? (*Norādījums: izmantojiet Eilera diagrammas*)

1.4 Pierādīt kopu vienādības:

a) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$,
b) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

(*Norādījums: izmantojiet Eilera diagrammas*)

1.5 Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C, \end{cases}$$

ja $B \subseteq A \subseteq C$. (*Norādījums: izmantojiet Eilera diagrammas*)

## 2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

1.6 Izteikt $\bigcap$, $\bigcup$ ar $\setminus$, $\Delta$.

1.7 Atrisināt vienādojumu sistēmu attiecībā uz $X_1, ..., X_m$:

$$\begin{cases} A_1 \cap X_1 = B_1 \\ ... \\ A_m \cap X_m = B_m, \end{cases}$$

kur kopas $A_i, B_i$ ir patvaļīgas. Noteikt, kādiem nosacījumiem attiecībā uz kopām $A_i, B_i$ ir jāizpildās, lai sistēmai būtu netukša atrisinājumu kopa.