DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra

Studiju kurss

Eksperimentu plānošana un analīze

2.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2008./2009.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apskatīt vienas izlases eksperimentus un to statistisko analīzi,
- apskatīt divu izlašu eksperimentus un to statistisko analīzi.

1. Vienas izlases eksperimenti

Vienas izlases eksperiments:

- ir viens faktors,
- faktoram ir 1 līmenis.

Dota izlase

$$X = \{x_1, ..., x_n\}.$$

Statistiskais modelis:

$$x_i = \mu + \epsilon_i, \text{ kur } \mu - \text{ vidējā vērtība }, \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2).$$

1.1. piemērs. Ir dots nezināmas izcelsmes cements. Jāpārbauda, vai tā stiprums atbilst standartiem, vai tas ir homogēns u.c. Tiek veikti vairāki eksperimenti ar šī cementa paraugiem.

1.1. Hipotēzes par vidējām vērtībām

1.1.1. Normālā sadalījuma vidējā vērtība ar zināmu dispersiju - z-tests

Salīdzināsim eksperimenta rezultātā iegūtās izlases vidējo vērtību ar kādu fiksētu lielumu μ_0 - ģenerālkopas vidējo lielumu, uzskatām, ka ģenerālkopas dispersija σ^2 ir zināma.

Parametrs: μ.

Novērtējošā statistika: $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, σ - zināms.

Testa statistika: $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$.

1.solis

Formulēt hipotēzes:

- H_0: $\mu = \mu_0$,
- H_1: $\mu \neq \mu_0$ (divpusējā hipotēze)
- H_1: $\mu < \mu_0$ vai $\mu > \mu_0$ (vienpusējās hipotēzes).

2.solis
Noteikt testa statistiku un tās vērtību:

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightarrow z_0.$$

3.solis
Noteikt kritiskās vērtības:

- divpusējai hipotēzei - $z_{\frac{\alpha}{2}}$
- vienpusējai hipotēzei - $\pm z_\alpha$.

4.solis
Noraidīt H_0, ja

- $|z_0| > z_{\frac{\alpha}{2}}$ divpusējai hipotēzei,
- $z_0 > z_\alpha$ vai $z_0 < -z_\alpha$ vienpusējām hipotēzēm.

1.2. piemērs. (Montgomery) Tiek testēts elektrisko spuldžu darba ilgums stundās. $n = 30$, $\overline{X} = 780$, $\sigma^2 = 40^2$. Jāpārbauda, vai var apgalvot, ka $\mu = 765$ ar 95% varbūtību.

1.solis:
$H_0 : \mu = 765.$
$H_1 : \mu \neq 765.$

2.solis:
$z_0 = \frac{\overline{X}-765}{\sigma/\sqrt{n}} = 2.05.$

3.solis
$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96.$

4.solis
$|z_0| = 2.05 > z_{0.025} = 1.96 \implies H_0$ ir jānoraida.

P-vērtība ir $2(1-\Phi(2.05)) = 0.04$. $P \leq 0.05 \implies H_0$ ir jānoraida.

1.1.2. Normāla sadalījuma vidējā vērtība ar nezināmu dispersiju - t-tests

Salīdzināsim eksperimenta rezultātā iegūtās izlases vidējo vērtību ar kādu fiksētu lielumu μ_0 - ğenerālkopas vidējo lielumu, uzskatām, ka ğenerālkopas dispersija σ^2 nav zināma.

Parametrs: μ.

Novērtējošā statistika: $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, σ - nezināms.

Testa statistika: $T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$.

1.solis
Formulēt hipotēzes:

- H_0: $\mu = \mu_0$,
- H_1: $\mu \neq \mu_0$ (divpusējā hipotēze)
- H_1: $\mu < \mu_0$ vai $\mu > \mu_0$ (vienpusējās hipotēzes).

2.solis
Noteikt testa statistiku un tās vērtību:

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \to t_0.$$

3.solis
Noteikt kritiskās vērtības:

- divpusējai hipotēzei - $t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$
- vienpusējai hipotēzei - $\pm t_{\alpha,n-1}$.

4.solis
Noraidīt H_0, ja

- $|t_0| > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ divpusējai hipotēzei,
- $t_0 > t_{\alpha,n-1}$ vai $t_0 < -t_{\alpha,n-1}$ vienpusējām hipotēzēm.

1.1. piezīme. SPSS (ievadīt pirmajā kolonnā izlasi)$\to$ Analyze $\to$

Compare Means (nosūtīt izlases vārdu uz Test Variable box, definēt μ_0 Test Value logā)$\rightarrow$ OK.

1.3. piemērs. (Montgomery) Tiek testēts elektrisko spuldžu darba ilgums stundās. $n = 30$, $\overline{X} = 780$, $S^2 = 40^2$. Jāpārbauda, vai var apgalvot, ka $\mu = 765$ ar 95% varbūtību.

1.solis:
$H_0 : \mu = 765.$
$H_1 : \mu \neq 765.$

2.solis:
$t_0 = \frac{\overline{X}-765}{S/\sqrt{n}} = 2.05.$

3.solis
$t_{\alpha/2,n-1} = t_{0.025,29} = 2.045.$

4.solis
$|t_0| = 2.05 > t_{0.025,29} = 2.045 \implies H_0$ ir jānoraida.

1.2. Hipotēzes par dispersijām

1.2.1. Normāla sadalījuma dispersija - χ^2-tests

Salīdzināsim eksperimenta rezultātā iegūtās izlases X dispersiju ar kādu fiksētu lielumu σ_0^2 - ğenerālkopas dispersiju.

Parametrs: σ^2.

Novērtējošā statistika: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$,

Testa statistika: $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

1.solis

Formulēt hipotēzes:

- H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$,
- H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (divpusējā hipotēze)
- H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$ vai $\sigma^2 > \sigma_0^2$ (vienpusējās hipotēzes).

2.solis

Noteikt testa statistiku un tās vērtību:

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \to \chi_0^2.$$

3.solis

Noteikt kritiskās vērtības:

- divpusējai hipotēzei - $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ (apakšējā vērtība) un $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ (augšējā vērtība),
- vienpusējai hipotēzei - $\chi^2_{\alpha,n-1}$ (augšējam) un $\chi^2_{1-\alpha,n-1}$ (apakšējam).

4.solis

Noraidīt H_0, ja

- $\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha/2,n-1}$ vai $\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ divpusējai hipotēzei,
- $\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha,n-1}$ vai $\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha,n-1}$ vienpusējām hipotēzēm.

$100(1-\alpha)\%$ **ticamības intervāls:**

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \leq \sigma_0^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$$

1.4. piemērs. (Montgomery) Tiek testēts elektrisko spuldžu darba ilgums stundās. $n=16$, $S^2=44^2$. Jāpārbauda, vai var apgalvot, ka $\sigma^2=40$ ar 95% varbūtību.

1.solis:
$H_0 : \sigma^2 = 40^2.$
$H_1 : \sigma^2 \neq 40^2.$

2.solis:
$\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{15\cdot 44^2}{40^2} = 18.15.$

3.solis
$\chi^2_{\alpha/2,n-1} = \chi_{0.025,15} = 28.65.$ $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} = \chi_{0.975,15} = 6.91.$

4.solis

$\chi_0^2 = 18.15$, $\chi_{0.975,15} < \chi_0^2 < \chi_{0.025,15} \implies H_0$ nav jānoraida.

1.2. piezīme. SPSS (ievadīt pirmajā kolonnā izlasi)→ Analyze → Compare Means (nosūtīt izlases vārdu uz Test Variable box, definēt μ_0 Test Value logā)→ OK.

2. Divu izlašu eksperimenti

Vienkāršs salīdzinošs eksperiments:

- ir viens faktors,
- faktoram ir 2 līmeņi.

Šajā gadījumā ir jāsalīdzina 2 izlases, kas atbilst, iespējams, dažādām normālā sadalījuma funkcijām ar dažādiem parametriem (vidējo vērtību un dispersiju).

Dotas 2 izlases

$$\begin{cases} X_1 = \{x_{11}, ..., x_{1n_1}\} \\ X_2 = \{x_{21}, ..., x_{2n_2}\} \end{cases}$$

Statistiskais modelis:

$$x_{ji} = \mu_j + \epsilon_{ji},$$

kur μ_j - j-tās izlases vidējā vērtība, ϵ_{ji} - j-tā līmeņa i tā mērījuma novirze.

2.1. piemērs. Divi cementa veidi - bez piedevām un ar piedevām, tiek testēts betona stiprums ar fiksētu sastāvu pēc noteikta laika. Tiek veikti vairāki eksperimenti, ar dažādām temperatūrām, sastāvdaļām, tehnoloģijām u.c.

2.1. Hipotēzes par vidējām vērtībām

2.1.1. Divu normālu sadalījumu vidējo vērtību salīdzināšana, dispersijas zināmas- *divu paraugu z-tests*

Salīdzināsim eksperimenta rezultātā iegūtu 2 izlašu X_1 un X_2 vidējās vērtības μ_1 un μ_2, uzskatām, ka ģenerālkopu dispersijas ir vienādas ar σ_1^2 un σ_2^2. Salīdzināsim $\mu_1 - \mu_2$ ar kādu dotu lielumu δ_0.

Parametrs: $\mu_1 - \mu_2$.

Novērtējošā statistika: $\Delta\mu = \overline{X_1} - \overline{X_2} \sim N\Big(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})\Big)$.

Testa statistika: $Z_0 = \frac{(\overline{X_1}-\overline{X_2})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$.

1.solis

Formulēt hipotēzes:

- H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \delta_0$,
- H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$ (divpusējā hipotēze)
- H_1: $\mu_1 - \mu_2 > \delta_0$ vai $\mu_1 - \mu_2 < \delta_0$ (vienpusējās hipotēzes).

2.solis

Noteikt testa statistiku un tās vērtību:

$$Z_0 = \underbrace{\frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - \delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}}_{\to z_0} \sim N(0,1).$$

3.solis

Noteikt kritiskās vērtības:

- divpusējai hipotēzei - $z_{\frac{\alpha}{2}}$
- vienpusējai hipotēzei - $\pm z_{\alpha}$.

4.solis
Noraidīt H_0, ja

- $|z_0| > z_{\frac{\alpha}{2}}$ divpusējai hipotēzei,
- $z_0 > z_\alpha$ vai $z_0 < -z_\alpha$ vienpusējām hipotēzēm.

$100(1-\alpha)\%$ ticamības intervāls:

$$\overline{X_1} - \overline{X_2} - z_{\alpha/2}\Delta < \mu_1 - \mu_2 < \overline{X_1} - \overline{X_2} + z_{\alpha/2}\Delta,$$

kur $\Delta = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$.

Mērījumu skaita novērtēšana ar dotu kļūdu Δ:

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}}{\Delta}\right)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

2.2. piemērs. (Montgomery) Tiek testēts divu tipu (1 un 2) elektrisko spuldžu darba ilgums stundās.

$n_1 = 30$, $\overline{X_1} = 780$, $\sigma_1^2 = 40^2$.
$n_2 = 25$, $\overline{X_2} = 800$, $\sigma_2^2 = 30^2$.
Jāpārbauda, vai var apgalvot, ka $\mu_1 = \mu_2$ ar 95% varbūtību.

1.solis:
$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0.$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0.$

2.solis:
$z_0 = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - \delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = \frac{(780-800)-0}{\sqrt{40^2/30+30^2/25}} = -2.12.$

3.solis
$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96.$

4.solis
$|z_0| = 2.12 > z_{0.025} = 1.96 \implies H_0$ ir jānoraida.

2.1.2. Divu normālu sadalījumu vidējo vērtību salīdzināšana, dispersijas nezināmas- *divu paraugu t-tests*

Salīdzināsim eksperimenta rezultātā iegūtu 2 izlašu X_1 un X_2 vidējās vērtības μ_1 un μ_2, uzskatām, ka ģenerālkopu dispersijas ir nezināmas.

Parametrs: $\mu_1 - \mu_2$.

Novērtējošā statistika: $\Delta\mu = \overline{X_1} - \overline{X_2} \sim N\Big(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})\Big)$.

Testa statistika:

- ja $\sigma_1 = \sigma_2$, tad

$$T_0 = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2},$$

kur $S_p = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

- ja $\sigma_1 \neq \sigma_2$, tad

$$T_0 = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_\nu,$$

kur

$$\nu = \frac{(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2})^2}{\frac{S_1^2}{n_1^2(n_1+1)} + \frac{S_2^2}{n_2^2(n_2+1)}} - 2.$$

1.solis
Formulēt hipotēzes:

- H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \delta_0$,
- H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$ (divpusējā hipotēze)
- H_1: $\mu_1 - \mu_2 > \delta_0$ vai $\mu_1 - \mu_2 < \delta_0$ (vienpusējās hipotēzes).

2.solis
Noteikt testa statistiku un tās vērtību:

- ja $\sigma_1 = \sigma_2$, tad
$$T_0 = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - \delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2},$$
kur $S_p = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.
- ja $\sigma_1 \neq \sigma_2$, tad
$$T_0 = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - \delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_\nu,$$
kur
$$\nu = \frac{(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2})^2}{\frac{S_1^2}{n_1^2(n_1+1)} + \frac{S_2^2}{n_2^2(n_2+1)}} - 2.$$

3.solis
Noteikt kritiskās vērtības:

- divpusējai hipotēzei - $t_{\alpha/2,\nu}$
- vienpusējai hipotēzei - $\pm t_{\alpha,\nu}$.

4.solis

Noraidīt H_0, ja

- $|t_0| > t_{\frac{\alpha}{2},\nu}$ divpusējai hipotēzei,
- $t_0 > t_{\alpha,\nu}$ vai $t_0 < -t_{\alpha,\nu}$ vienpusējām hipotēzēm.

$100(1-\alpha)\%$ **ticamības intervāls:**

$$\overline{X_1} - \overline{X_2} - t_{\alpha/2,\nu}\Delta < \mu_1 - \mu_2 < \overline{X_1} - \overline{X_2} + t_{\alpha/2,\nu}\Delta,$$

kur Δ ir statistikas sadalījuma saucējs.

2.3. piemērs. (Montgomery) Tiek testēts divu tipu (1 un 2) elektrisko spuldžu darba ilgums stundās. Pārbaudīsim hipotēzi, ka to vidējais darba ilgums ir vienāds pieņemot, ka dispersijas ir nezināmas un dažādas.

$n_1 = 30$, $\overline{X_1} = 780$, $S_1^2 = 40^2$.
$n_2 = 25$, $\overline{X_2} = 800$, $S_2^2 = 30^2$.
Jāpārbauda, vai var apgalvot, ka $\mu_1 = \mu_2$ ar 95% varbūtību.

1.solis:

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0.$
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0.$

2.solis:
$t_0 = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - \delta_0}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} = \frac{(780-800)-0}{\sqrt{40^2/30+30^2/25}} = -2.12.$

$\nu = 54.$
3.solis
$t_{\alpha/2,\nu} = t_{0.025,54} = 2.$

4.solis
$|t_0| = 2.12 > t_{0.025,54} = 2 \implies H_0$ ir jānoraida.

2.1.3. Vienkāršākais blokošanas piemērs - *sapārotais t-tests*

Var būt salīdzinoši eksperimenti, kad, salīdzinot divu izlašu vidējās vērtības, ir vēlams apvienot divas eksperimentālās vienības vienā blokā.

2.4. piemērs. Divu veidu urbjus testē uz vairākiem metālu paraugiem. Lai samazinātu kļūdu, katru urbi testē uz katra parauga (nevis vienu urbi uz viena parauga.)

Pārbauda kāda medikamenta iedarbību uz cilvēkiem. Katram cilvēkam veic mērījumu (asinsspiediens u.c.) pirms un pēc medikamenta lietošanas.

Ir dotas divas izlases

$$X_1 = \{x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}\},$$
$$X_2 = \{x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}\}.$$

Statistiskais modelis:

$$x_{ji} = \mu_j + \beta_i + \epsilon_{ji},$$

kur

- μ_j ir j-tās izlases vidējā vērtība,
- β_i ir i-tā bloka ietekme,

- $\epsilon_{ji} \sim N(0, \sigma_j^2)$ - kļūda.

Definēsim $D = X_1 - X_2$. Tādējādi

$$D = \{d_1, ..., d_n\},$$

kur

$$d_i = x_{1i} - x_{2i} = \mu_1 - \mu_2 + \underbrace{\epsilon_{1i} - \epsilon_{2i}}_{=\epsilon \sim N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}.$$

Redzam, ka

$$E(D) = E(X_1 - X_2) = E(\mu_1 - \mu_2 + \epsilon) = \mu_1 - \mu_2.$$

Tādējādi D ir lieluma $\mu_1 - \mu_2$ novērtējošā statistika.

Parametrs: μ_D.

Novērtējošā statistika: $\overline{D} = \overline{X_1 - X_2} \sim N\left(\mu_D, \frac{\sigma_D^2}{n}\right)$, σ_D^2 nezināms.

Testa statistika:

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

1.solis
Formulēt hipotēzes:

- H_0: $\mu_D = \delta_0$,
- H_1: $\mu_D \neq \delta_0$ (divpusējā hipotēze)
- H_1: $\mu_D > \delta_0$ vai $\mu_D < \delta_0$ (vienpusējās hipotēzes).

2.solis
Noteikt testa statistiku un tās vērtību:

$$T_0 = \frac{\overline{D} - \delta_0}{S_D/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

3.solis
Noteikt kritiskās vērtības:

- divpusējai hipotēzei - $t_{\alpha/2,n-1}$

- vienpusējai hipotēzei - $t_{\alpha,n-1}$.

4.solis
Noraidīt H_0, ja

- $|t_0| > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ divpusējai hipotēzei,
- $t_0 > t_{\alpha,n-1}$ vai $t_0 < -t_{\alpha,n-1}$ vienpusējām hipotēzēm.

$100(1-\alpha)\%$ **ticamības intervāls:**

$$\overline{D} - t_{\alpha/2,n-1}\Delta < \delta_0 < \overline{D} + t_{\alpha/2,\nu}\Delta,$$

kur $\Delta = \frac{S_D}{\sqrt{n}}$.

Sapārotā t-testa gadījumā ticamības intervāls ir mazāks nekā vienkāršas divu izlašu salīdzināšanas ticamības intervāls.

2.5. piemērs. (Montgomery) Tiek testēta diētas programmas efektivitāte. Līmeņi - stāvokļi pirms un pēc diētas. Katras cilvēks no dotās grupas tiek svērts pirms un pēc diētas.

Pārbaudīsim hipotēzi, ka diēta neietekmē svaru.
$n = 30$, $\overline{D} = 10(lbs)$, $S^2 = 5^2$.
Jāpārbauda, vai var apgalvot, ka $\mu_D = 0$ ar 95% varbūtību.

1.solis:
$H_0 : \mu_D = 0.$
$H_1 : \mu_D \neq 0.$

2.solis:
$t_0 = \frac{\overline{D}-\delta_0}{\sqrt{S^2/n}} = 10.95.$

3.solis
$t_{\alpha/2,n-1} = t_{0.025,29} = 2.045.$

4.solis
$|t_0| = 10.95 > t_{0.025,29} = 2.045 \implies H_0$ ir jānoraida.

2.2. Hipotēzes par dispersijām

2.2.1. Divu normālu sadalījumu dispersiju salīdzināšana - *divu paraugu F-tests*

Dotas divas normāla sadalījuma ģenerālkopas izlases

$$X_1 = \{X_{11}, X_{12}, ..., X_{1n_1}\} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),$$

$$X_2 = \{X_{21}, X_{22}, ..., X_{2n_1}\} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

Uzdevums ir salīdzināt nezināmās dispersijas.

Parametrs: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.

Novērtējošā statistika: $\frac{S_1^2}{S_2^2}$, kur

$$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j}(X_{ji} - \overline{X_j})^2}{n_j - 1}.$$

Testa statistika:

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

1.solis

Formulēt hipotēzes:

- H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} = \rho_0^2 = \frac{\sigma_{01}^2}{\sigma_{02}}$,
- H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} \neq \rho_0^2$ (divpusējā hipotēze)
- H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} > \rho_0^2$ vai $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} < \rho_0^2$ (vienpusējās hipotēzes).

2.solis

Noteikt testa statistiku un tās vērtību:

$$F_0 = \frac{S_1^2/\sigma_{01}^2}{S_2^2/\sigma_{02}^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2\rho_0^2} \sim f(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

3.solis
Noteikt kritiskās vērtības:

- divpusējai hipotēzei - $f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}$ un $f_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1}$,
- vienpusējai hipotēzei - f_{α,n_1-1,n_2-1} (augšējam) un $f_{1-\alpha,n_1-1,n_2-1}$ (apakšējam).

4.solis
Noraidīt H_0, ja

- $f_0 > f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}$ vai $f_0 < f_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1}$ divpusējai hipotēzei,
- $f_0 > f_{\alpha,n_1-1,n_2-1}$ vai $f_0 < f_{1-\alpha,n_1-1,n_2-1}$ vienpusējām hipotēzēm.

$100(1-\alpha)\%$ **ticamības intervāls:**

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} f_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1} \leq \rho_0^2 \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}.$$

2.6. piemērs. (Montgomery) Tiek testēts divu tipu (1 un 2) elektrisko spuldžu darba ilgums stundās. Pārbaudīsim hipotēzi, ka to dispersijas ir vienādas: $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$.

$n_1 = 30$, $\overline{X_1} = 780$, $S_1^2 = 40^2$.
$n_2 = 25$, $\overline{X_2} = 800$, $S_2^2 = 30^2$.
Jāpārbauda, vai var apgalvot, ka $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$ ar 95% varbūtību.

1.solis:
$H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$.
$H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1$.

2.solis:
$f_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot 1 = 1.78$.

3.solis
$f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1} = f_{0.025,29,24} = 2.22$.
$f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1} = f_{0.975,24,29} = 0.46$.

4.solis
$f_{0.975,24,29} < f_0 < f_{0.025,29,24} \implies H_0$ nav jānoraida.

3. 2.mājasdarbs

Visos uzdevumos pieņemiet normālos sadalījumus.

2.1 (Šķiedras stiprībai pēc standarta ir jābūt vismaz 160 nosacītās vienībās. Ir zināms, ka šķiedras stiprības standarnovirze ir 4. Tika pārbaudīti 4 paraugi, kuru stiprības bija vienādas ar 155, 162, 159, 158.

(a) Formulējiet hipotēzi, kas ir jāpārbauda.
(b) Pārbaudiet šo hipotēzi ar $\alpha = 0.05$.
(c) Atrodiet hipotēzei atbilstošo P-vērtību.

2.2 Tiek pārbaudīts kāda pārtikas produkta derīguma termiņš (dienās). Ražotājs apgalvo, ka derīguma termiņš pārsniedz 50 dienas. Tiek paņemti 10 paraugi un noteikts, ka to derīguma termiņi ir 51, 42, 47, 58, 39, 44, 45, 53, 46, 51 dienas.

(a) Formulējiet hipotēzi, kas ir jāpārbauda.
(b) Pārbaudiet šo hipotēzi ar $\alpha = 0.02$.
(c) Atrodiet hipotēzei atbilstošo P-vērtību.

2.3 (Montgomery) Divi darbgaldi ir paredzēti pudeļu piepildīšanai ar 16 tilpuma vienībām šķidruma. Piepildīšanas standarnovirzes ir $\sigma_1 = 0.015$ un $\sigma_2 = 0.018$. Ir jāpārbauda, vai abi darbgaldi iepilda vienādu tilpumu. Katram darbgaldam tiek veikti vairāki iepildīto tilpumu mērījumi:

1. - 16.03, 16.01, 16.04, 15.96. 16.05. 15.98.

2. - 16.02, 16.03, 15.97, 15.96. 16.01. 16.02.

(a) Formulējiet hipotēzi, kas ir jāpārbauda.
(b) Pārbaudiet šo hipotēzi ar $\alpha = 0.02$.
(c) Atrodiet hipotēzei atbilstošo P-vērtību.