DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

2.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2013./2014.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- iegūt priekšstatu par klasiskiem kombinatorikas uzdevumiem,
- apgūt kombinatorikas uzdevumus, kurus nevar reducēt uz virkņu vai apakškopu skaitīšanu.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt vairākus vienkāršus kombinatorikas uzdevumus, kurus var pētīt izmantojot elementāras skaitīšanas metodes,

- var definēt vairākus vienkāršus kombinatorikas uzdevumus, kurus nevar reducēt uz virkņu vai apakškopu skaitīšanu.

Svarīgākie jēdzieni: virknes ar atkārtojumiem, virknes bez atkārtojumiem un apakškopas, apakšmultikopas, cikliskas virknes, otrā veida Stirlinga skaitļi, Bella skaitļi, otrā veida Stirlinga skaitļi, sadalījuma skaitļi, Janga diagramma.

Svarīgākie fakti un metodes: formulas un citas sakarības definētajiem kombinatoriskajiem skaitļiem.

1. Kombinatorikas uzdevumi, kas reducējas uz virkņu un apakškopu skaitīšanu

1.1. Trīs vienkāršākie kombinatorikas uzdevumi

Daži kombinatorikas uzdevumi tiek bieži izmantoti kā apakšuzdevumi citos, sarežģītākos, uzdevumos.

1.1.1. Virknes (variācijas) ar atkārtojumiem

Cik veidos var konstruēt m-virknes, kurās var būt n dažādu tipu elementi, kas var atkārtoties (n-multikopas elementi)? Šī uzdevuma atrisinājumu apzīmēsim ar $\overline{A}_n^m$.

Lai atrisinātu šo uzdevumu, izmantosim reizināšanas likumu.
Veidosim šādas virknes, sākot no kreisās malas:

1. Virknes pirmo elementu var izvēlēties n veidos,
2. virknes otro elementu neatkarīgi no pirmā var izvēlēties n veidos,

tātad pirmos divus virknes elementus var izvēlēties $n \times n = n^2$ veidos,

... ...,

k virknes k-to elementu neatkarīgi no visiem iepriekšējiem var izvēlēties n veidos, tātad pirmos k virknes elementus var izvēlēties $\underbrace{n \cdot ... \cdot n}_{k \text{ reizes}}$ veidos,

... ...

Visus virknes m elementus var izvēlēties n^m veidos:

$$\overline{A}_n^m = \underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{m \text{ reizes}} = n^m.$$

1.1. piemērs. Cik dažādos veidos var izvēlēties piecciparu tālruņa numuru? Katru no pieciem cipariem var neatkarīgi izvēlēties 10 veidos, cipari var atkārtoties, tāpēc $\overline{A}_{10}^5 = 10^5$.

$\overline{A}_n^m$ kā multikopas permutāciju skaits

$\overline{A}_n^m$ var interpretēt kā m-permutāciju skaitu n-multikopai $\{\infty \cdot 1, \infty \cdot 2, ..., \infty \cdot n\}$.

$\overline{A}_n^m$ kā funkciju skaits

Uzdot funkciju no m-kopas A uz n-kopu B ir tas pats, kas uzdot sakārtotu virkni: funkciju $f : A \to B$ viennozīmīgi uzdot ar virkni

$$\underbrace{(f(a_1), ..., f(a_m))}_{m \text{ elementi}},$$

kuras elementi ir kopas B elementi. Otrādi, katrai m elementus garai virknei, kuras elementi pieder kopai B, var viennozīmīgi piekārtot atbilstošo funkciju. Tādējādi ir nodibināta bijektīva atbilstība starp virknēm un funkcijām.

1.1. piezīme. $\overline{A}_2^m$ var interpretēt arī kā visu m elementu lielas kopas apakškopu skaitu, jo katru apakškopu var uzdot kā funkciju no šādas kopas uz divu elementu kopu $0, 1$, kas elementam piekārto 1, ja tas pieder apakškopai, un 0, ja nepieder. Tādējādi m elementu lielas kopas visu apakškopu skaits ir vienāds ar 2^m.

1.1.2. Virknes (variācijas) bez atkārtojumiem

Cik ir dažādu m-virkņu, kurās var būt dotās n-kopas elementi? šo skaitli apzīmēsim ar $A_n^m = m^{\underline{n}}$.

Atšķirībā no iepriekšējā uzdevuma elementi virknē nevar atkārtoties, jo tie tiek izvēlēti no kopas.

Skaitīšanu veiksim, konstruējot visas iespējamās virknes. Konstruēsim virknes, pievienojot jaunus elementus labajā malā:

1. Virknes 1.elementu (sākot no kreisās puses) var izvēlēties n veidos,
2. virknes 2.elementu (ja 1.elements jau ir izvēlēts) var izvēlēties neatkarīgi no pirmā $n-1$ veidā, tātad pirmos divus virknes elementus var izvēlēties $n(n-1)$ dažādos veidos,

... ...

k. virknes k-to elementu (ja iepriekšējie $k-1$ elementi ir izvēlēti) var izvēlēties $n-k+1$ veidos, tātad pirmos k elementus var izvēlēties $\underbrace{n(n-1)...(n-k+1)}_{k \text{ reizinātāji}}$.

Iegūstam, ka kopējais dažādu virkņu skaits ir $n(n-1)...(n-m+1)$, tātad

$$A_n^m = n(n-1)\cdot ... \cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Svarīgs speciālgadījums ir $A_n^n = n!$ (n-kopu var sakārtot $n!$ veidos). A_n^n apzīmēsim ar P_n un sauksim par n-kopas *permutāciju* skaitu.

1.2. piemērs. Cik dažādos veidos var nostādīt ierindā piecus cilvēkus no desmit cilvēku lielas grupas? Atbilde: $A_{10}^5 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 30240$.

A_n^m kā injektīvu funkciju skaits

A_n^m ir vienāds ar injektīvu funkciju skaitu no m-kopas uz n-kopu tāpēc, ka injektīvas funkcijas uzdošana ir ekvivalenta virknes bez atkārtojumiem uzdošanai. To var interpretēt arī kā dažādu objektu ievietošanu dažādās kastēs.

1.1.3. Apakškopas (kombinācijas)

Cik ir dažādu m elementus lielu apakškopu kopā, kas satur n elementus? Šo skaitli apzīmēsim ar C_n^m vai $\binom{n}{m}$.

Atradīsim C_n^m, izmantojot dalīšanas likumu.

Saskaņā ar spriedumu, ar kura palīdzību mēs aprēķinājām A_n^m -

- katru m elementus lielu apakškopu var sakārtot $m!$ veidos,
- tātad vienai m elementus lielai apakškopai atbilst $m!$ sakārtotas virknes.

$$\Longrightarrow A_n^m = C_n^m m! \Longrightarrow C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

1.3. piemērs. Cik dažādos veidos var izvēlēties piecus cilvēkus no desmit cilvēku lielas grupas? Atbilde ir vienāda ar

$$C_{10}^5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252.$$

1.2. piezīme. Skaitļiem C_n^m ir vēl vairākas lietderīgas interpretācijas:

- C_n^m var interpretēt kā n vienības garu bināru virkņu skaitu, kurās ir m vieninieki, jo katrai n elementus lielas kopas m-apakškopai var viennozīmīgi piekārtot tās bitu vektoru,
- C_n^m var interpretēt kā fiksēta garuma augošu (dilstošu) virkņu skaitu pilnīgi sakārtotā kopā: katru m-apakškopu n elementus lielā pilnīgi sakārtotā kopā var sakārtot augošā vai dilstošā kārtībā tieši vienā veidā, otrādi, katrai augošai vai dilstošai virknei var viennozīmigi piekārtot atbilstošo apakškopu,
- C_n^m var interpretēt kā koeficientus, ko iegūst, atverot iekavas izteiksmē $(a+b)^n$.

Pārskaitīsim dažas vienkāršākās skaitļu C_n^m īpašības:

1) $C_n^0 = 1,\ C_n^1 = n,\ C_n^n = 1;$
2) $C_n^m = C_n^{n-m};$
3) $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$(Paskāla trijstūra īpašība).

1.2. Uzdevumi, kas ir reducējami uz kombinācijām vai variācijām

1.2.1. Apakšmultikopas (kombinācijas ar atkārtojumiem)

Atkārtot par multikopām.

Cik ir dažādu m elementus lielu apakšmultikopu multikopā, kas satur n dažādu tipu elementus neierobežotā skaitā (n-multikopa)?

Kopu valodā: cik veidos no n elementu lielas kopas var izvēlēties m elementus lielu apakškopu, kurā elementi var atkārtoties. Šo skaitli apzīmēsim ar $\overline{C}_n^m$.

Atrisināsim šo uzdevumu ar bijekcijas metodi - piekārtosim savstarpēji viennozīmīgi katrai apakšmultikopai noteikta veida bināru virkni.

Katrai apakšmultikopai ar dotajām īpašībām piekārtosim bināru virkni šādā veidā:

1) sanumurēsim n-multikopas elementu tipus ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz n;
2) pieņemsim, ka apakšmultikopā ir r_i elementi, kuru tips ir i $(\sum\limits_{i=1}^{n} r_i = m)$,
   sākot no kreisās puses rakstīsim
   - r_1 nulles un 1 vieninieku,
   - r_2 nulles un 1 vieninieku,
   - ...,
   - r_n nulles un 1 vieninieku,

   (piemēram, ja elementu tipi ir $\{1, 2, 3\}$, tad apakšmultikopai $\{1, 1, 1, 2, 2, 3\}$ atbilst bināra virkne $(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$);
3) pēdējo vieninieku nodzēsīsim (jo tas nedod informāciju).

Iegūsim viennozīmīgi definētu virkni, kurā ir m nulles un $n - 1$ vieninieks.

Otrādi, katrai šādai virknei atbilst viena vienīga apakšmultikopa ar dotajām īpašībām.

Tātad meklējamais multikopu skaits $\overline{C}_n^m$ ir vienāds ar tādu bināru virkņu skaitu, kuras satur m nulles un $n-1$ vieninieku:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^m.$$

1.4. piemērs. Veikalā ir 5 dažādu veidu markas neierobežotā skaitā. Cik dažādos veidos var iegādāties 10 marku komplektu? Redzam, ka mums ir jāatrod 10 elementus lielu apakšmultikopu skaits multikopā, kas satur 5 tipu elementus. Atbilde ir vienāda ar $\bar{C}_5^{10} = C_{14}^4 = 1001$.

1.2.2. Galīgas multikopas permutācijas (apakškopu virknes)

Pilnās permutācijas

1. Cik ir permutāciju no multikopas $\{m_1 \cdot 1, m_2 \cdot 2, ..., m_k \cdot k\}$, $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$, elementiem?
2. Cik veidos n-kopu, var sadalīt k apakškopu virknē tā, ka i-

tā apakškopa satur m_i elementus, kur $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$, šo skaitli apzīmēsim ar $C_n^{m_1,m_2,\ldots,m_k}$ vai $P_n(m_1, m_2, ..., m_k)$.

Bijektīvā funkcija: multikopas permutācijai piekārtojam apakškopu virkni $(S_1, S_2, ..., S_k)$, kur S_i satur i-tā tipa elementa koordināšu (numuru) apakškopu.

1. Pirmo apakškopu var izvēlēties $C_n^{m_1}$ veidos,
2. otro apakškopu, ja pirmā ir izvēlēta, var izvēlēties $C_{n-m_1}^{m_2}$ veidos,
3. trešo var izvēlēties $C_{n-m_1-m_2}^{m_3}$ veidos u.t.t.

Iegūstam, ka

$$C_n^{m_1,m_2,\ldots,m_k} = C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} C_{n-m_1-m_2}^{m_3} \ldots C_{n-m_1-\ldots-m_{k-1}}^{m_k}.$$

Pēc pārveidojumiem iegūstam, ka

$$C_n^{m_1,m_2,\ldots,m_k} = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}.$$

$C_n^{m_1,m_2,\ldots,m_k}$ var interpretēt kā multikopas $\{\{m_1 \cdot 1, m_2 \cdot 2, ..., m_k \cdot k\}\}$ n elementu garu virkņu skaitu:

- elementa 1 vietas var izvēlēties $C_n^{m_1}$ veidos,
- elementa 2 vietas var izvēlēties $C_{n-m_1}^{m_2}$ veidos,
- ...

1.5. piemērs. Cik veidos var sakārtot vārda MEGAMATEMATIKA burtus?

Nepilnās permutācijas

Cik ir r-permutāciju no multikopas $\{m_1 \cdot 1, m_2 \cdot 2, ..., m_k \cdot k\}$, $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i = n$, $r < n$, elementiem? Jāizmanto formula un summas likums.

1.6. piemērs. Cik ir 10-permutāciju no multikopas $\{\{4 \cdot 1, 3 \cdot 2, 4 \cdot 3\}\}$ elementiem?

Var izmest vienu no elementiem $1, 2, 3$, izmantojot summas likumu atbilde ir $C_{10}^{3,3,4} + C_{10}^{4,2,4} + C_{10}^{4,3,3}$.

1.2.3. Cikliskas virknes

Cik veidos n-kopas elementus var izvietot ciklā (ap riņķa līniju), ja ir fiksēts cikla apiešanas virziens?

Šis uzdevums atšķiras no uzdevuma par A_n^m ar to, ka katram ciklam var piekārtot vairākas virknes atkarībā no tā, no kuras vietas šo ciklu sāk lasīt.

Katrai n-virknei atbilst n cikli, tāpēc, izmantojot dalīšanas likumu, iegūstam, ka ciklu skaits ir vienāds ar

$$\frac{A_n^n}{n} = (n-1)!$$

1.2.4. Vienādojuma $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$ atrisinājumi veselos skaitļos

Šim uzdevumam var būt dažādas variācijas:

- *nenegatīvu atrisinājumu skaits* - katram šādam atrisinājumam atbilst n-multikopas m-apakšmultikopa:

  atrisinājumam $(x_1, x_2, ..., x_n)$ atbilst multikopas $\{\infty \cdot 1, \infty \cdot 2, ..., \infty \cdot n\}$ apakšmultikopa, kas satur m elementus,

  seko, ka tātad kopējais variantu skaits ir vienāds ar

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m;$$

- *pozitīvu atrisinājumu skaits* - katram šādam atrisinājumam atbilst nenegatīvs atrisinājums vienādojumam

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = m - n,$$

  tātad variantu skaits ir vienāds ar

$$\overline{C}_n^{m-n} = C_{m-1}^{m-n} = C_{m-1}^{n-1}.$$

2. Uzdevumi, kas nav reducējami uz kombinācijām vai variācijām

2.1. Kopu sadalījumu skaits - otrā veida Stirlinga skaitļi un Bella skaitļi

Otrā veida Stirlinga skaitļi

$\left\{ {n \atop m} \right\}$ vai $S(n, m)$ - n-kopas dažādu sadalījumu skaitu m netukšās apakškopās. Definēsim arī

$$S(n, 0) = \begin{cases} 1, & \text{ja } n = 0, \\ 0, & \text{ja } n > 0. \end{cases}$$

Tos sauc par *Stirlinga apakškopu skaitļiem* vai *otrā veida Stirlinga skaitļiem*.

Skaitļu $S(n, m)$ aprēķināšanai nav zināma nekāda formula elementāras funkcijas vai vienkārša reizinājuma veidā. Vienkāršākā zināmā formula:

$$S(n,m) = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_m^i (m-i)^n.$$

2.1. piemērs. $S(n,1) = S(n,n) = 1$. $S(3,2) = 3$. $S(4,2) = 7$. $S(4,3) = 6$.

Var redzēt, ka otrā veida Stirlinga skaitļi apmierina identitātes

$$S(n,2) = 2^{n-1} - 1,$$
$$S(n,n-1) = C_n^2.$$

Bella skaitļi

Visu n-kopas sadalījumu skaitu netukšās apakškopās sauksim par *n-to Bella skaitli* un apzīmēsim ar B_n. Saskaņā ar summas likumu

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} S(n,i).$$

Definējam arī $B_0 = 1$.

2.2. piemērs. $B_0 = 1$. $B_1 = 1$. $B_2 = 2$. $B_3 = 5$. $B_4 = 15$.

Nav zināmas vienkāršas galīgas formulas. Labākie rezultāti: rekurenta sakarība:

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i} B_i.$$

2.1. piezīme. Bella skaitļus var interpretēt izmantojot dažādu objektu ievietošanu identiskās kastēs.

2.2. Kopu ciklisko sadalījumu skaits - pirmā veida Stirlinga skaitļi

$c(n, m)$ vai $\left[{n \atop m} \right]$ - n-kopas tādu permutāciju skaitu, kurās ir tieši m cikli. Definēsim arī $c(0, 0) = 1$.

Tos sauksim par *pirmā veida absolūtajiem (unsigned) Stirlinga skaitļiem*.

Skaitļus $c(n, m) \cdot (-1)^{n-m}$ sauksim par *maiņzīmju pirmā veida Stirlinga skaitļiem*, apzīmēsim ar $s(n, m)$.

Skaitļu $c(n, m)$ aprēķināšanai nav zināma nekāda formula elementāras funkcijas vai vienkārša reizinājuma veidā.

2.3. piemērs. $c(n, n) = 1$. $c(n, 1) = (n - 1)!$. $c(4, 2) = 11$.

Pirmā veida absolūtie Stirlinga skaitļi apmierina identitātes

$$c(n, n-1) = C_n^2,$$

$$c(n, n-2) = 2C_n^3 + \frac{1}{2}C_n^2 C_{n-2}^2 = \frac{1}{4}(3n-1)C_n^3.$$

2.3. Naturālo skaitļu sadalījumu skaits

Naturāla skaitļa n izteikšanu nesakārtotā naturālu skaitļu summā sauksim par n *sadalījumu*, apzīmēsim sadalījumu skaitu ar $p(n)$ (n*-tais sadalījuma skaitlis*).

Tā kā sadalījuma elementus var viennozīmīgi sakārtot augošā vai dilstošā kārtībā, tad parasti skaitļa n sadalījumu uzdod kā monotonu, piemēram, nedilstošu, naturālu skaitļu virkni $n_1 \geq n_2 \geq ...n_k$, kas apmierina nosacījumu

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

Definēsim arī

- $q_m(n)$ - n sadalījumu skaits, kuros katrs saskaitāmais $\leq m$,
- $p_m(n)$ - n sadalījumu skaitu, kuros ir ne vairāk kā m saskaitāmie.

2.4. piemērs. $p(1) = 1$. $p(2) = 2$. $p(3) = 3$. $p(4) = 5$. $p(5) = 7$. $p(6) = 11$.

Nav zināmas vienkāršas galīgas formulas (2011.g ir anonsēti jauni rezultāti par galīgām formulām).

2.2. piezīme. Sadalījumu var definēt arī kā vienādojuma

$$x_1 + 2x_2 + ... + mx_m = n$$

atrisinājumu nenegatīvos skaitļos, šajā gadījumā x_i nozīmē skaitļa i multiplicitāti jeb kārtu sadalījumā.

Sadalījumus var arī vizualizēt, izmantojot *Janga diagrammas*: ja ir dots sadalījums $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$, kur $n_i \geq n_j$, ja $i > j$, tad šādu sadalījumu uzdosim kā kreisajā malā nolīdzinātu tabulu ar mainīga garuma rindām, kur i-tā rindas satur n_i rūtiņas.

Katram sadalījumam var konstruēt *duālo sadalījumu*, kas atbilst transponētajai (simetriskajai attiecībā pret diagonāli, kas iziet no augšējā kreisā stūra) Janga diagrammai.

Tā kā transponēšana ir bijektīva operācija, tad saskaņā ar vienlieluma likumu varam iegūt šādu rezultātu: $q_m(n) = p_m(n)$.

2.3. piezīme. Naturālu skaitļu sadalījumu var interpretēt kā identisku objektu ievietošanu identiskās kastēs.

2.4. piezīme. $p_n(m)$ var interpretēt kā vienādojuma

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = m$$

augošu atrisinājumu skaits - meklēsim atrisinājumus ar īpašību $0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n$. Katram šādam atrisinājumam atbilst skaitļa m sadalīšana ne vairāk kā n pozitīvu saskaitāmo summā, tātad kopējais variantu skaits ir vienāds ar $p_n(m)$.

3. 2.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

2.1 Cik ir dažādu 5 kāršu kombināciju, kas satur kādu pokera kombināciju (hand) ? Atrast varbūtību izvēlēties katru kombināciju.

(a) straight flush (royal flush) - 5 cikliski pēc kārtas vienā mastā (suit);
(b) four of a kind - 4 viena ranga;
(c) full house - 3 viena ranga + 2 cita ranga;
(d) flush - 5 viena masta kārtis;
(e) straight - 5 cikliski pēc kārtas, bet ir vismaz divi masti;
(f) three of a kind - 3 viena ranga + divas dažādas (arī savā starpā);
(g) two pair - 2 viena ranga + 2 cita ranga + 1 trešā ranga.
(h) one pair - 2 viena ranga + 3 dažādas.
(i) high card (no pair) - nav neviens no augstāk dotajiem gadījumiem.

2.2 Cik veidos var izvēlēties 3 skaitļus no kopas $\{1, 2, .., 30\}$, tā lai nekādi 2 skaitļi nebūtu pēctecīgi (n un $n+1$)?

2.3 (a) Virkni $(a_1, ..., a_n)$ sauc par *palindromu*, ja

$$a_1 = a_n, a_2 = a_{n-1}, ..., a_k = a_{n-k+1};\ \forall\, k : 1 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right].$$

Cik palindromu var izveidot no m-multikopas (neierobežots skaits katra tipa elementu) elementiem?

(b) Virkni sauc par *krellēm*, ja tā nemainās veicot centrālo simetriju attiecībā pret taisni, kas iet caur virknes viduspunktu. Cik ir dažādu kreļļu no m-multikopas elementiem ar garumu n?

2.4 Ribonukleīnskābes (RNA) tipa molekulas var saturēt 4 tipu elementārās sastāvdaļas, kuras apzīmēsim ar A,C,G,U. Elementārās sastāvdaļas tiek izvietotas virknē. Cik eksistē

(a) RNS virkņu ar garumu 22, kurās ir 4C, 5A, 6G un 7U ?

(b) RNS virkņu ar garumu 12, kurās ir 4C, 4A, 3G un 3U ?

2.5 Cik eksistē veselu atrisinājumu (x_1, x_2, x_3, x_4) vienādojumam $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, kas apmierina nosacījumus $x_1 \geq -3$, $x_2 \geq -1$, $x_3 \geq 2$, $x_4 \geq 4$?

2.6 Cik veidos n zēnus un n meitenes var sasēdināt ap apaļu galdu tā, lai nekur blakus nesēdētu 2 zēni vai 2 meitenes.

2.7 Pierādiet, ka

(a) otrā veida Stirlinga skaitļi $S(n, m)$ apmierina sakarību
$$S(n, 3) = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1) - 2^{n-1}.$$

(b) pirmā veida absolūtie Stirlinga skaitļi $c(n, m)$ apmierina sakarību
$$c(n, n-3) = \frac{1}{48} n^2 (n-1)^2 (n-2)(n-3) = C_n^2 C_n^4.$$

2.8 Izmantojot skaitīšanu divos dažādos veidos, pierādiet sakarības

(a) $\sum\limits_{i=1}^{n} C_n^i = 2^n$.

(b) $\sum\limits_{i=m}^{n} C_n^i C_i^m = 2^{n-m} C_n^m$.

(c) $C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m}$,

(d) $C_n^m = \dfrac{n}{m} C_{n-1}^{m-1}$,

(e) $B_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i B_i$.

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

2.9 Kādam m skaitlis C_n^m pieņem maksimālo iespējamo vērtību, ja n ir fiksēts?