DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

8.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt pamatfaktus par grafu metriskajām īpašībām.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt attālumu starp grafa virsotnēm un pētīt ar to saistītos invariantus,
- var pētīt grafu sakarīguma īpašības.

Svarīgākie jēdzieni: attālums starp virsotnēm, diametrs, rādiuss, centrs, virsotnes ekscentritāte.

Svarīgākie fakti un metodes: attāluma īpašības, metrisko invariantu īpašības.

1. Grafu metriskie invarianti

1.1. Attālums starp virsotnēm

Svarīga invariantu klase ir invarianti, kas ir saistīti ar virsotnes savienojošo ķēžu īpašībām.

Grafu teorijā var definēt ģeometriskā Eiklīda attāluma analogu.

Attālums starp divām virsotnēm v un w ir (v, w) - ķēžu garumu minimumu ($dist(v, w)$), tā ir divu argumentu funkcija

$$dist : V \times V \to \mathbb{N} \cup 0.$$

Papildus tam attālumu starp divām virsotnēm dažādās komponentēs definēsim kā $+\infty$.

1.1. teorēma. Attāluma funkcija apmierina šādas īpašības:

1. $\forall\ v, w$: $dist(v, w) = dist(w, v)$ (simetrija);
2. $dist(v, w) = 0 \iff v = w$ (nedeģenerētība);

3. $\forall$ v,w,u: $dist(v, w) \leq dist(v, u) + dist(u, w)$ (trijstūra nevienādība).

PIERĀDĪJUMS 1.2. - acīmredzami.

3. Pieņemsim pretējo. Ja $\exists$ virsotne u tāda, ka

$$dist(v, w) > dist(v, u) + dist(u, w),$$

tad tā ir pretruna, jo tad $\exists$ maršruts no v uz w caur u, kura garums ir mazāks kā $dist(v, w)$. ■

1.1. piezīme. Seko, ka attālums grafā ir metrika grafa virsotņu kopā (apmierina metrikas aksiomas).

1.2. Invarianti

1.2.1. Pamatinvarianti

Par sakarīga grafa *diametru* sauksim maksimālo attālumu starp divām virsotnēm grafā - attāluma funkcijas maksimālo vērtību grafā

$(D(\Gamma))$.

Ķēde, kuras garums ir vienāds ar grafa diametru - *diametrāla ķēde*.

Virsotnes v *ekscentritāte* - attāluma funkcijas maksimālā vērtība, ja viens no tās argumentiem ir v, maksimālais attālums no šīs virsotnes līdz kādai citai virsotnei dotajā grafā $(\epsilon(v))$.

Grafa *centrs* - inducētais apakšgrafu, kura virsotņu kopu veido grafa virsotņes ar minimālo ekscentritāti $(Z(\Gamma))$.

Centra virsotņu ekscentritāte - grafa *rādiuss* $(r(\Gamma))$.

1.2. teorēma. Γ - grafs. Tad

$$r(\Gamma) \leq D(\Gamma) \leq 2r(\Gamma).$$

PIERĀDĪJUMS $r(\Gamma) \leq D(\Gamma)$ saskaņā ar diametra definīciju.

Pieņemsim, ka $v - ... - w$ ir diametrāla ķēde, t - centra virsotne. Tad $\begin{cases} dist(t,v) \leq r(\Gamma) \\ dist(t,w) \leq r(\Gamma) \end{cases} \Longrightarrow dist(t,v) + dist(t,w) \leq 2r(\Gamma).$

$$\underbrace{dist(v,w)}_{=D(\Gamma)} \leq dist(t,v) + dist(t,w) \leq 2r(\Gamma) \Longrightarrow D(\Gamma) \leq 2r(\Gamma). \blacksquare$$

1.3. teorēma. Γ - grafs. Tad

$$\begin{cases} r(\Gamma) \leq r \\ \Delta(\Gamma) \leq d \geq 3 \end{cases} \Longrightarrow V(\Gamma) < \frac{d(d-1)^r}{d-2}.$$

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka $v \in Z(\Gamma)$. Definēsim

$$N_i = \{x \in V(\Gamma) | dist(x,v) = i\}.$$

Tad

- $N_0 = \{v\}$, $N_1 \leq d$,
- $|N_i| \leq (d-1)|N_{i-1}|$,
- $|N_i| \leq d(d-1)^{i-1}$,

- $\bigcup_{i\geq 0} N_i = \bigcup_{i=0}^{r} N_i = V(\Gamma)$.

$$\Longrightarrow \; V(\Gamma) \leq 1 + \sum_{i=1}^{r} |N_i| \leq$$
$$1 + d(1 + (d-1) + (d-1)^2 + ...(d-1)^{r-1}) =$$
$$1 + d\frac{(d-1)^r - 1}{d-2} = \frac{d(d-1)^r}{d-2} + 1 - \frac{d}{d-2} =$$
$$\frac{d(d-1)^r}{d-2} + \frac{2}{d-2} < \frac{d(d-1)^r}{d-2}. \; \blacksquare$$

1.2.2. Papildinvarianti

Virsotnes, kuru ekscentritāte ir vienāda ar grafa diametru - *perifērijas virsotnes.*

Grafa inducēto apakšgrafu, kura virsotņu kopa sakrīt ar visu perifērijas virsotņu kopu, sauksim par *grafa perifēriju* un apzīmēsim ar $Per(\Gamma)$.

Par grafa *ekscentritāšu vektoru* sauksim virkni $(a_1, ..., a_k)$, kur a_i ir virsotņu skaits ar ekscentritāti i.

Par grafa *attālumu vektoru* sauksim virkni $(b_1, ..., b_m)$, kur b_i ir virsotņu pāru skaits ar attālumu i.

Par grafa *attālumu matricu* sauksim matricu, kur rindas un kolonnas ir indeksētas ar virsotnēm un adresē (i, j) ir $d(i, j)$.

1.4. teorēma. (Hedetniemi) $\forall$ grafam Γ $\exists$ grafs Γ': $Z(\Gamma') \simeq \Gamma$.

PIERĀDĪJUMS Grafu Γ' konstruēsim šādā veidā:

1. Grafam Γ pievienosim četras jaunas virsotnes a, a_1, b, b_1,
2. virsotnes a un b savienosim ar visām Γ virsotnēm,
3. a_1 savienosim tikai ar a,
4. b_1 savienosim tikai ar b.

Iegūtajā grafā Γ' centrs sakrīt ar Γ: Γ virsotnēm ekscentritāte ir 2, a un b - 3, a' un b' - 4. ∎

2. 8.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

8.1 Pierādīt, ka sakarīgā grafā ar vismaz 3 virsotnēm divām maksimāla garuma vienkāršām ķēdēm ir vismaz viena kopīga virsotne.

8.2 Atrodiet attālumu matricas, diametru un centru šādiem grafiem:
(a) ķēdei P_n,
(b) pilnajam grafam K_n,
(c) kuba grafam,
(d) Petersena grafam.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

8.3 Par grafa Γ *perimetru* $p(\Gamma)$ sauksim maksimāla garuma vienkāršas Γ apakšķēdes garumu (apakšķēde - Γ apakšgrafs, kas ir izomorfs ķēdei). Izpētīt perimetra īpašības.