DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

7.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

1. Grafu izomorfisms un invarianti **4**
1.1. Izomorfisms 4
1.2. Invarianti 9

2. Apakšgrafu invarianti **15**
2.1. Ievads 15
2.2. Virsotņu un šķautņu skaits 17
2.3. Virsotnes pakāpe 19
2.4. Pakāpju virkne 21
2.4.1. Hakimi-Havel kritērijs 22
2.4.2. Erdos-Gallai kritērijs 25

3. 7.mājasdarbs **27**
3.1. Obligātie uzdevumi 27
3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi 28

Lekcijas mērķis:

- apgūt grafu izomorfisma un invariantu teorijas pamatus.

Lekcijas kopsavilkums:

- grafu struktūras salīdzināšanai tiek izmantoti izomorfisma un invariantu jēdzieni,
- svarīga invariantu klase ir apakšgrafu invarianti.

Svarīgākie jēdzieni: grafu izomorfisms un automorfisms, grafu invarianti, pilna invariantu sistēma, apakšgrafu invarianti,

Svarīgākie fakti un metodes: grafa automorfismi veido grupu, invariantu klasifikācija, teorēma par 2-ķēdēm un trijstūriem, Turana teorēma, teorēma par virsotņu pakāpju summu, teorēma par minimālo ķēdes un cikla garumu, Hakimi-Havela un Erdos-Gallai kritērijs.

1. Grafu izomorfisms un invarianti

1.1. Izomorfisms

Kad divi grafi ir neatšķirami kā matemātiski objekti? Citiem vārdiem sakot, kad divi grafi ir "vienādi", ja mēs ignorējam to virsotņu dabu un attēlošanas veidu.

Tā kā grafs ir struktūra, kas satur informāciju par virsotņu savienojamību vai nesavienojamību, piemēram, matricas veidā, tad dabiski ir pieprasīt, ka **divi grafi ir matemātiski neatšķirami, ja to virsotņu kopas var sakārtot tā, ka grafu blakusattiecības matricas ir vienādas.**

Divus jebkura tipa grafus

$$\Gamma = (V, E),$$
$$\Gamma' = (V', E')$$

sauksim par *izomorfiem* ($\Gamma \simeq \Gamma'$), ja eksistē funkcija

$$f : V \to V'$$

tāda, ka

$$\begin{cases} f - \text{bijektīva funkcija} \\ (v_1, v_2) \in E \iff \Big(f(v_1), f(v_2)\Big) \in E'. \end{cases}$$

Var redzēt, ka Γ un Γ' blakusattiecības matricas ir vienādas, ja to rindu (un kolonnu) indeksi ir sakārtoti kārtībā

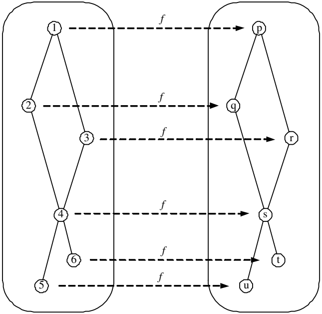
$$(v_1, v_2, ..., v_n) \text{ un}$$
$$\Big(f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)\Big).$$

Šādā gadījumā funkciju f sauksim par *grafu izomorfismu.*

Bieži vien izomorfus grafus identificē un neatšķir vienu no otra.

Pētot grafus ar precizitāti līdz izomorfismam, bieži vien nodzēš grafu virsotņu indeksus un strādā ar grafiem, kuriem virsotnes ir neiezīmētas.

1.1. piemērs. 3.27.attēlā ir parādīts izomorfisma piemērs



3.27. attēls. Grafu izomorfisma piemērs

Par grafa Γ *izomorfisma tipu (klasi)* sauksim visu ar Γ izomorfo grafu kopu.

Bijektīvu funkciju $f : V \to V$ sauksim par *grafa* V *automorfismu* (Γ-*automorfismu*), ja tā ir grafa Γ izomorfisms uz sevi.

Grafa Γ automorfismu kopu apzīmēsim ar $Aut(\Gamma)$.

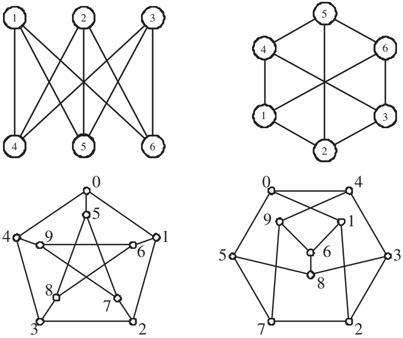
1.1. teorēma. Visi grafa automorfismi veido grupu attiecībā uz funkciju kompozīcijas operāciju.

PIERĀDĪJUMS Var redzēt, ka virsotņu kopas vienības funkcija ir jebkura grafa automorfisms. Jebkura grafa automorfisma inversā funkcija ir grafa automorfisms un divu grafa automorfismu kompozīcija ir grafa automorfisms. ■

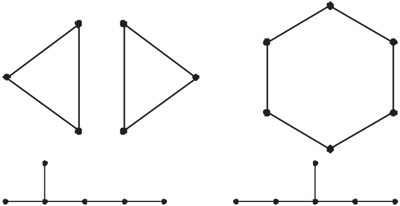
1.2. piemērs. 3.28.attēlā ir parādīti izomorfu grafu pāri.
3.29.attēlā ir parādīti neizomorfu grafu pāri.

1.3. piemērs. 3.30.attēlā ir parādīti visi cikla C_4 automorfismi.

1.4. piemērs. 3.31.attēlā attēloto grafu automorfismu grupas satur tikai vienu elementu - vienības funkciju.



3.28. attēls. Izomorfu grafu pāru piemēri

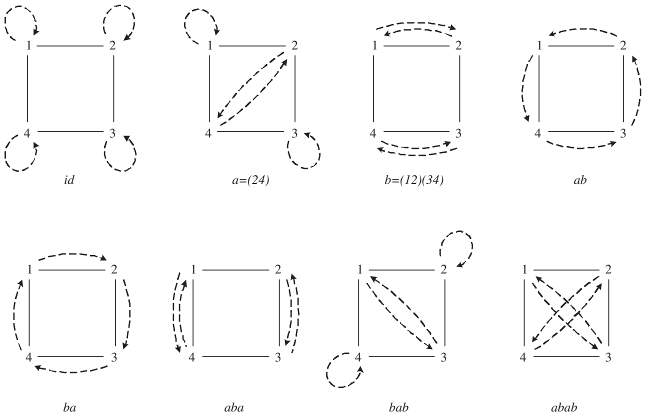


3.29. attēls. Neizomorfu grafu pāru piemēri

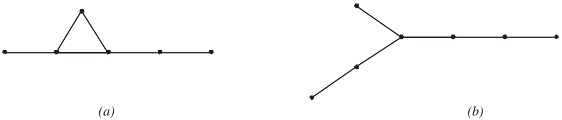
Grafa automorfismu grupu var uzskatīt par grafa simetrijas mēru - jo lielāka ir attiecība $\frac{|Aut(\Gamma)|}{|V(\Gamma)|}$, jo grafs ir simetriskāks.

1.2. Invarianti

Naivs veids, kā noteikt, vai divi grafi ir izomorfi, ir fiksēt viena grafa matricu un apskatīt visas otrā grafa matricas, kas atbilst dažādām virsotņu kopas permutācijām.



3.30. attēls. Visi cikla C_4 automorfismi



3.31. attēls. Grafi ar triviālu automorfismu grupu

Acīmredzami, šis algoritms nav ātrs, jo virsotņu permutāciju skaits grafam ar n virsotnēm ir $n!$.

Pētot, vai divi grafi ir izomorfi, ir lietderīgi izmantot to (skaitliskās) īpašības, kuras sakrīt izomorfiem grafiem un var nesakrist neizomorfiem grafiem.

Invarianta definīcija

Apzīmēsim visu grafu kopu ar G un fiksēsim kādu kopu S.

Funkciju $\phi : G \to S$ sauksim par *grafu invariantu*, ja

$$\Gamma \simeq \Gamma' \Longrightarrow \phi(\Gamma) = \phi(\Gamma').$$

Ekvivalenta definīcija:

$$\phi(\Gamma) \neq \phi(\Gamma') \Longrightarrow \Gamma \not\simeq \Gamma'.$$

Invariantu sistēmu $\{\phi_i\}_{i \in I}$ sauksim par *pilnu*, ja

$$\Big(\forall\ i \in I,\ \phi_i(\Gamma) = \phi_i(\Gamma')\Big) \implies \Gamma \simeq \Gamma'.$$

Kontrapozitīvā īpašība

Invariantus izmanto, lai atšķirtu neizomorfus grafus: ja eksistē tāds invariants ϕ, ka uz diviem grafiem Γ un Γ' tas pieņem dažādas vērtības - $\phi(\Gamma) \neq \phi(\Gamma')$, tad var secināt, ka grafi nav izomorfi:

$$\Big(\exists\ \phi :\ \phi(\Gamma) \neq \phi(\Gamma')\Big) \implies \Gamma \not\simeq \Gamma'.$$

Invariantus var apvienot un veidot sarežgītākus, "jutīgākus" invariantus:

- ϕ_i - invarianti $\Longrightarrow$ $(\phi_1, ..., \phi_n)$ - invariants,
- ϕ_i - invarianti $\Longrightarrow$ $\sum_i \phi_i x^i$ - invariants.

Biežāk izmantotos grafu invariantus var iedalīt šādās grupās:

- *apakšgrafu* invarianti, kas ir saistīti ar grafa apakšgrafiem, piemēram,
  - virsotņu skaits,
  - šķautņu skaits,
  - maksimālā virsotnes pakāpe,
  - minimālā virsotnes pakāpe,
  - komponenšu skaits,
  - fiksēta garuma ķēžu un ciklu skaits,
- *metriskie* invarianti, kas saistīti ar "attālumu" starp grafa virsotnēm;
- *sakarīguma* invarianti, kas saistīti ar sakarīgumu;
- *algebriskie* invarianti, kas ir saistīti ar algebras jēdzieniem - grafa matricas īpašvērtības un raksturīgais polinoms, grafa automorfismu grupa u.c.;
- *grafiskie* invarianti, kas saistīti ar grafiem, kas atvasināti no dotajiem grafiem;

- *globālie* invarianti - lielumi, kas ir atkarīgi no "visa grafa kopumā", piemēram, vidējā virsotnes pakāpe;
- *lokālie* invarianti - lielumi vai citi objekti, kuru atrašana vai eksistence ir atkarīga no lokālām īpašībām, piemēram, dota tipa apakšgrafa eksistence.

Grafu invariantus var klasificēt arī

- pēc to aprēķināšanai nepieciešamajiem laika un telpas resursiem asimptotiku nozīmē ("ātrie" - aprēķināmi laikā, kas ir polinomiāla funkcija no $|V|$, "lēnie" - aprēķināmi laikā, kas ir vismaz eksponenciāla funkcija no $|V|$),
- pēc to aprēķinošo algoritmu kompleksitātes ("vieglie" - aprēķināmi ar programmām, kas izmanto fiksētu atmiņu, "grūtie" - aprēķināmi ar programmām, kas satur mainīgu atmiņu).

Uz šo brīdi nav zināma pilna un viegli aprēķināma invariantu sistēma -

- vai nu invariants ir pilns un aprēķināms tikpat lēni kā izomorfisms,
- vai arī tas nav pilns un ātri aprēķināms (piemēram, virsotņu un šķautņu skaits).

2. Apakšgrafu invarianti

2.1. Ievads

Apzīmēsim ar $\mathcal{N}_\Delta(\Gamma)$ tādu Γ apakšgrafu skaitu, kas ir izomorfi ar grafu Δ.

2.1. piemērs. Ja $\Delta = K_1$ (triviālais grafs), tad $\mathcal{N}_\Delta(\Gamma) = |V(\Gamma)|$.

Ja $\Delta = K_2$, tad $\mathcal{N}_\Delta(\Gamma) = |E(\Gamma)|$.

Ja $\Delta = K_3$, tad $\mathcal{N}_\Delta(\Gamma)$ ir vienāds ar trijstūru skaitu grafā.

2.1. teorēma. Ja $\Gamma \simeq \Gamma'$, tad katram Δ izpildās vienādība

$$\mathcal{N}_\Delta(\Gamma) = \mathcal{N}_\Delta(\Gamma').$$

PIERĀDĪJUMS Skaitļus $\mathcal{N}_\Delta(\Gamma)$ un $\mathcal{N}_\Delta(\Gamma')$ viennozīmīgi nosaka grafu matricas. Tā kā $\Gamma \simeq \Gamma'$, tad ir iespējams sakārtot Γ' virsotnes tā, ka matrica ir vienāda ar Γ matricu, tāpēc izpildās vienādība. ■

Redzam, ka katram Δ funkcija $\mathcal{N}_\Delta$ ir grafu invariants.

Vienkāršākie $\mathcal{N}_\Delta$ tipa invarianti:

- virsotņu skaits ($\Delta = K_1$),
- šķautņu skaits ($\Delta = K_2$),
- trijstūru skaits ($\Delta = K_3$),
- $\Delta = K_n$ - *n-kliķu* skaits,
- $\Delta = O_n$ - *n-neatkarīgo kopu* skaits,
- virsotņu skaits, kuru pakāpe nav mazāka par dotu pakāpi (Δ ir zvaigzne ar dotu staru skaitu),

- dota garuma vienkāršu ķēžu skaits ($\Delta = P_n$),
- dota garuma vienkāršu ciklu skaits ($\Delta = C_n$).

2.2. Virsotņu un šķautņu skaits

$\Gamma = (V, E)$. $\forall$ funkcija no $|V|$ un $|E|$ ir invariants:

- $|V|$ - virsotņu skaits,
- $|E|$ - šķautņu skaits,
- $\epsilon(\Gamma) = \dfrac{|E|}{|V|}$ - vidējais šķautņu skaits uz vienu virsotni,
- $\dfrac{|E|}{C^2_{|V|}}$ - *šķautņu blīvums* (daļa no pilnā grafa šķautņu skaita)

2.2. teorēma. $\Gamma = (V, E)$ - grafs.

1. $|E| > \dfrac{|V|}{2} \implies$ grafā Γ $\exists$ ķēde ar garumu 2.

2. $|E| > \left(\frac{|V|}{2}\right)^2 \implies$ grafā Γ $\exists$ cikls ar garumu 3 (trijstūris).

PIERĀDĪJUMS

1. Katrai šķautnei piekārtosim tās galus - virsotnes, izmantosim Dirihlē principu.

$|V| < 2|E| \implies \exists$ virsotne v, kurai atbilst vismaz 2 šķautnes $\implies$ $\exists$ ķēde $u - v - w$.

2. Pieņemsim pretējo: Γ nesatur trijstūrus.

A- maksimāla neatkarīga virsotņu kopu, $B = V \backslash A$.

$\forall\ v \in V$: $N(v)$ - neatkarīga kopa $\implies$ $d(v) \leq |A|$.

$$|E| \leq \sum_{v \in B} d(v) \leq |A||B| \leq \left(\frac{|A| + |B|}{2}\right)^2 = \left(\frac{|V|}{2}\right)^2. \blacksquare$$

2.3. teorēma. (*Turán*) $\Gamma = (V, E)$ - grafs.

$$|E| > \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{|V|^2}{2} \implies K_{r+1} \subseteq \Gamma.$$

PIERĀDĪJUMS Papildmateriālā. ■

2.1. piezīme. Grafu ar n virsotnēm un maksimālu šķautņu skaitu, kas nesatur K_{r+1}, sauc par *Turana grafu* $T_{n,r}$.

2.3. Virsotnes pakāpe

2.4. teorēma.

1. $\Gamma = (V, E)$ - grafs $\Longrightarrow \sum\limits_{v \in V} d(v) = 2|E|$.
2. $\Gamma = (V, E)$ - orientēts grafs $\Longrightarrow \sum\limits_{v \in V} d_-(v) = \sum\limits_{v \in V} d_+(v) = |E|$.

PIERĀDĪJUMS

1. Pielietosim kombinatorikas pamatprincipu "skaitīšana divos dažādos veidos".

Skaitīsim katras virsotnes v incidentās šķautnes un summēsim šos skaitļus pa visām grafa virsotnēm:

- no vienas puses, mēs iegūsim $\sum\limits_{v \in V} d(v)$,
- no otras puses: $\forall$ šķautnei ir 2 galapunkti $\Longrightarrow$ $\forall$ šķautne tiks skaitīta 2 reizes $\Longrightarrow$ summā iegūsim lielumu $2|E|$.

2. Līdzīgi $\blacksquare$

2.2. piezīme. Seko, ka jebkurā grafā virsotņu skaits ar nepāra pakāpēm ir pāra skaitlis:

$$\underbrace{d_1 + ... + d_k}_{\text{nepāra pakāpes}} + \underbrace{d_{k+1} + ... + d_n}_{\text{pāra pakāpes}} = 2|E| \Longrightarrow k - \text{ pāra skaitlis.}$$

2.5. teorēma. Γ - grafs, $\delta(\Gamma) \geq 2$.

1. grafā Γ $\exists$ vienkārša vaļēja ķēde ar garumu $\delta(\Gamma)$
2. grafā Γ $\exists$ vienkāršs cikls ar garumu $\delta(\Gamma) + 1$.

PIERĀDĪJUMS

1. Pieņemsim, ka garākās ķēdes garums ir k un tai atbilstošā virsotņu virkne ir $(v_0, ..., v_k)$.

Visas virsotnes v_k blakusvirsotnes pieder šai virknei, tāpēc ka pretējā gadījuma ķēdi varētu pagarināt $\Longrightarrow$ $k \geq \delta(\Gamma)$.

2. Apskatām to pašu iepriekšējā punkta virsotņu virkni $(v_0, ..., v_k)$. Pieņemsim, ka indekss i, $0 \leq i < k$, ir minimālais indekss ar īpašību $v_i \sim v_k$.

Visas v_k blakusvirsotnes pieder maksimālajai ķēdei $\Longrightarrow$ virsotņu virkne $(v_i, v_{i+1}, ..., v_k, v_i)$ veido ciklu ar garumu $l \geq \delta(\Gamma) + 1$ (vismaz $\delta(\Gamma)$ škautnes skaitot no v_k un vēl viena $v_i \sim v_k$). ■

2.4. Pakāpju virkne

Neaugošu nenegatīvu skaitļu virkni $(d_1, d_2, ..., d_n)$ sauc par grafisku, ja eksistē tāds grafs Γ, kura virsotņu pakāpes (atbilstoši sakārtotas) ir $d_1, ..., d_n$.

2.4.1. Hakimi-Havel kritērijs

Par neaugošas nenegatīvu skaitļu virknes $D = (d_1, ..., d_n)$ *Hakimi-Havela pārveidojumu* sauksim virkni (ja tā ir definēta)

$$HH(D) = Sort((\underbrace{d_2 - 1, d_3 - 1, ..., d_{d_1+1} - 1}_{d_1 \text{ elementi}}, d_{d_1+2}, ..., d_n))$$

2.2. piemērs. $D = (4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$, $HH(D) = (3, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$.

2.6. teorēma. (Hakimi-Havel kritērijs)

$$D = (d_1, d_2, ..., d_n) \text{ ir grafiska } \Longleftrightarrow \begin{cases} \sum_i d_i \equiv 0 (\text{mod } 2) \\ HH(D) \text{ ir grafiska} \end{cases}$$

PIERĀDĪJUMS

$\Longleftarrow$

Pieņemsim, ka virkne $HH(D) = (d'_2, ..., d'_n)$ ir grafiska $\Longleftrightarrow$ $\exists$ grafs Γ', kura pakāpju virkne ir $HH(d)$. No Γ' konstruēsim jaunu grafu Γ'' šādā veidā:

1. Izveidosim jaunu virsotni v_1,
2. Savienosim v_1 ar d_1 virsotnēm $v_2, ..., v_{d_1+1}$, kuru pakāpes ir $d_2 - 1, ..., d_{d_1+1} - 1$.

Redzam, ka Γ'' pakāpju virkne ir $D \implies D$ ir grafiska virkne.

$\underline{\implies}$

Pieņemsim, ka grafa Γ pakāpju virkne ir D. Konstruēsim grafu, kura pakāpju virkne ir $HH(D)$.

1. Definēsim tekošo grafu $\gamma = \Gamma$, apzīmēsim ar v virsotni ar (maksimālo) pakāpi d_1, apzīmēsim ar U virsotņu kopu ar pakāpēm $d_2, ..., d_{d_1+1}$.
2. $N(v) = U \implies \gamma := \gamma - \{v\}$ ir ar pakāpju virkni $NN(D)$ un algoritms ir pabeigts.
3. $N(v) \neq U \implies \exists \begin{cases} w \in U \backslash N(v) \\ t \in N(v) \backslash U \end{cases}$

$$\begin{cases} d(w) \geq d(t) \\ w \notin N(v) \\ t \in N(v) \end{cases} \implies \exists\, z\colon \begin{cases} z \in N(w) \\ z \notin N(t) \cup \{v, t\} \end{cases}.$$ Definēsim

$$\gamma := \gamma - \{w, z\} - \{v, t\} + \{v, w\} + \{z, t\}.$$

Jaunajām grafā γ virsotņu pakāpes ir tādas pašas, bet $N(v) \cap U$ ir lielāks. Ejam uz soli 2.

■

2.3. piemērs. $D = (4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$, $HH(D) = (3, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$, $HH^2(D) = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ - var redzēt, ka grafiska,
$HH^3(D) = (1, 1, 1, 1, 0)$, $HH^4(D) = (1, 1, 0, 0)$,
$HH^5(D) = (0, 0, 0)$ - acīmredzami grafiska.

2.4.2. Erdos-Gallai kritērijs

2.7. teorēma. (Erdos-Gallai kritērijs)
$D = (d_1, d_2, ..., d_n)$ ir grafiska $\iff$

$$\begin{cases} \sum_i d_i \equiv 0 (\text{mod } 2) \\ \sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} \min(k, d_j), \forall\ k \in \{1, ..., n\} \end{cases}$$

PIERĀDĪJUMS

$\Longrightarrow$

Pieņemsim, ka $V = \{v_1, ..., v_n\}$, kur $d(v_i) = d_i$. Apskatīsim šķautnes, kurām vismaz viens gals ir kopā $V_k = \{v_1, ..., v_k\}$. Skaitīsim $\forall$ sķautni pie katra gala (2 reizes), apzīmēsim šo skaitu skaitu ar X.

- Skaitot pakāpes virsotnēm no V_k iegūsim $X = \sum_{i=1}^{k} d_i$.
- Šādas šķautnes dalās 2 daļās:

- tās, kurām abi gali ir kopā V_k, skaits nepārsniedz $k(k-1)$,
- tādas kurām viens gals ir ārpus V_k;
  ja otrs gals ir v_j, tad to skaits nepārsniedz $\min(k, d_j)$, tātad kopējais skaits nepārsniedz $\sum_{j=k+1}^{n} \min(k, d_j)$.

$\underline{\Longleftarrow}$!!!

$\blacksquare$

3. 7.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

7.1 Atrast visus izomorfisma tipus
  (a) (neorientētiem) grafiem ar 5 virsotnēm,
  (b) orientētiem grafiem ar 4 virsotnēm un 3 šķautnēm,
  (c) (neorientētiem) kokiem ar 7 virsotnēm.

7.2 Atrast visus automorfismus šādiem grafiem:
  (a) ķēdei P_n,
  (b) pilnajam grafam K_n,
  (c) apvienojumam $K_2 \cup K_1 \cup K_1$,
  (d) kuba grafam.

7.3 Pierādīt, ka $|E| \leq \left(\frac{|V|}{2}\right)^2 \implies$ grafā nevar nodrošināt trijstūri.

7.4 Atrast grafus ar maksimālu šķautņu skaitu, kurā nav apakšgrafu, kas ir izomorfi ar C_3 vai ar C_4 un kuriem ir
  (a) 6 virsotnes,
  (b) 7 virsotnes,
  (c) 8 virsotnes.

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

7.5 Atrodiet visus automorfismus šādiem grafiem:

(a) oktaedra grafam,
(b) Petersena grafam,
(c) apvienojumam $\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_2$.