DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

6.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- iegūt priekšstatu par grafu teorijas nozari un tās pielietojumiem modelēšanā.

Lekcijas kopsavilkums:

- sistēmu vai procesu modelēšanai var izmantot īpašas diskrētās matemātikas struktūras - grafus, tos var pētīt kā matemātiskus objektus.

Svarīgākie jēdzieni: neorientētie un orientētie grafi, multigrafi, svērtie grafi, apakšgrafs, inducēts apakšgrafs, skeletāls apakšgrafs, virsotnes apkārtne, virsotnes pakāpe, orientēta grafa virsotnes apkārtne un pakāpe, pakāpju vektors, papildgrafs, maršruts, ķēde, cikls, vienkāršs maršruts, sakarīgs grafs, sakarības komponente, speciālas grafu klases - triviālais, bezšķautņu, pilnais, ķēde, cikls, divdaļīgs, m-daļīgs, koks, regulārs, planārs, Petersena, operācijas ar grafiem - apvienošana, virsotnes vai šķautnes izdzēšana, šķautnes pievienošana un savilkšana, blakusattiecības saraksts un matrica.

Svarīgākie fakti un metodes:

1. Ievads grafu teorijā

1.1. Motivācija

Viens no fundamentāliem matemātikas pamatjēdzieniem ir *attiecība* - īpašība, kas piemīt vai nepiemīt kopu elementu pāriem.

Attiecības ir lietderīgi mēģināt vizualizēt *grafu* veidā:

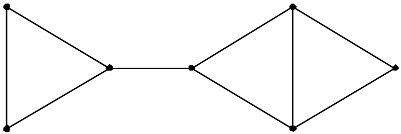
- *virsotnes* - kopu elementi,
- *šķautnes* - elementus saistošas līnijas (šķautnes, bultiņas, nogriežņus) ar tādu papildinformāciju, kas ir nepieciešama pareizai uzdevuma nosacījumu grafiskai, parasti šī papildinformācija ir šķautņu vai virsotņu parametri jeb "svari".

1.2. Pamatdefinīcijas

1.2.1. Grafu klases

Neorientētie grafi. Par *grafu* (*neorientētu grafu*) sauksim pāri $\Gamma = (V, E)$, kur V - grafa *virsotņu kopa*, $V \neq \varnothing$ un E ir V divu elementu apakškopu kopas apakškopa - grafa *šķautņu kopa.*

Neorientētam grafam atbilst simetriska antirefleksīva attiecība.



3.6. attēls. Neorientēta grafa piemērs

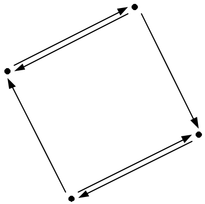
Divas neorientēta grafa virsotnes v_1, v_2 sauksim par *blakusvirsotnēm* (*savienotām virsotnēm*), ja $\{v_1, v_2\} \in E$, apzīmē ar $v_1 \sim v_2$.

Virsotni v un šķautni e sauksim par *incidentām*, ja viens no šķautnes e galapunktiem ir virsotne v.

Divas šķautnes sauksim par incidentām, ja tām ir kopīga virsotne.

Orientētie grafi. Par *orientētu grafu* sauksim pāri $\Gamma = (V, E)$, kur V - orientēta grafa virsotņu kopa, $V \neq \varnothing$, $E \subseteq V \times V$ - orientētā grafa šķautņu kopa, nav šķautņu (v, v) (cilpu).

Orientētam grafam atbilst patvaļīga antirefleksīva attiecība.

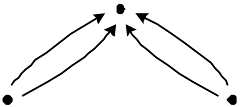


3.7. attēls. Orientēta grafa piemērs

No orientēta grafa var iegūt neorientētu grafu, "aizmirstot" šķautņu orientāciju. Otrādi, no neorientēta grafa var iegūt orientētu grafu, uzskatot katru neorientētu šķautni par divu pretēju orientētu šķautņu apvienojumu.

Var definēt arī grafus *ar cilpām.*

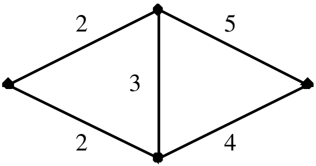
Multigrafi. Par *neorientētu* vai *orientētu multigrafu* sauksim grafu, kurā var būt vairāk nekā viena neorientēta vai orientēta šķautne starp divām virsotnēm vienā virzienā, tas var būt ar vai bez cilpām. Šķautņu skaitu starp divām virsotnēm sauksim arī par šķautnes *multiplicitāti.*



3.8. attēls. Orientēta multigrafa piemērs

Grafi ar svariem. Par *nosvērtu grafu* (*grafu ar indeksētām virsotnēm* un/vai *šķautnēm*) sauksim grafu, kura katrai virsotnei un/vai šķautnei var būt piekārtots skaitlis, vairāki skaitļi vai citu kopu elementi (virsotņu vai šķautņu *svari*).

Formāli runājot, nosvērts grafs ir jebkura tipa grafs ar papildus struktūru - virsotņu "svaru" funkciju $w : V \to A$ vai/un šķautņu "svaru" funkciju $w : E \to A$, kas katrai virsotnei/šķautnei piekārto kādu elementu no kopas A (svaru). Parasti kopa A ir kāda no klasiskajām skaitļu kopām.



3.9. attēls. Nosvērta grafa piemērs

1.2.2. Vienādība un apakšgrafi

Jebkura tipa divus grafus sauksim par vienādiem, ja to virsotņu un šķautņu kopas ir vienādas.

Ja dots grafs $\Gamma = (V, E)$, tad grafu $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ sauksim par Γ *apakšgrafu*, ja $V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$, un katra no kopas E_1 šķautnēm ir incidenta tikai kopas V_1 virsotnēm, apzīmēsim to ar pierakstu $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$.

Par virsotņu kopas U *inducēto (pilno) apakšgrafu* sauksim apakšgrafu, kura virsotņu kopa ir U un kas satur visas šķautnes, kas ir incidentas tikai kopas U elementiem.

Grafu Γ sauksim par *maksimālu* attiecībā uz kādu īpašību P, ja neeksistē grafs Γ' tāds, ka $\Gamma \subset \Gamma'$ un grafam Γ' piemīt īpašība P.

1.2.3. Virsotnes apkārtne

Par grafa virsotnes *apkārtni* sauksim virsotņu kopas apakškopu, kas satur visas ar to savienotās virsotnes, virsotnes v apkārtni apzīmēsim ar $N_\Gamma(v)$.

Par orientēta grafa virsotnes v *pozitīvo/negatīvo apkārtni* sauksim virsotņu kopu, kas satur visas virsotnes u tādas, ka eksistē šķautne $(u, v)/(v, u)$, šīs kopas apzīmēsim ar $N_+(v)$ vai $N_-(v)$. Orientētā grafā Γ kopu $N_-(v)$ apzīmēsim arī ar $\Gamma(v)$ un kopu N_+ - ar $\Gamma^{-1}(v)$.

Par grafa virsotnes *pakāpi* sauksim ar to incidento šķautņu skaitu vai, citiem vārdiem sakot, virsotnes apkārtnes elementu skaitu, virsotnes v pakāpi apzīmēsim ar $d(v)$.

Par grafa *pakāpju vektoru* sauksim virkni $(a_0, ..., a_k)$, kur a_i ir grafa virsotņu skaits ar pakāpi i.

Par grafa *vidējo virsotnes pakāpi* sauksim lielumu

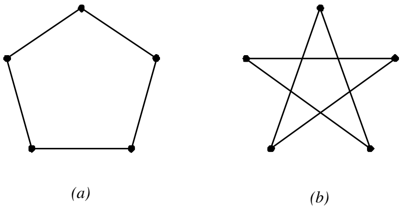
$$d(\Gamma) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v).$$

Par orientēta grafa virsotnes v *pozitīvo/negatīvo puspakāpi* sauksim ar v incidento ieejošo/izejošo šķautņu skaitu jeb v pozitīvās/negatīvās apkārtnes elementu skaitu, apzīmēsim ar $d_+(v)/d_-(v)$.

1.2.4. Neorientēta grafa papildgrafs

Par neorientēta grafa $\Gamma = (V, E)$ *papildgrafu* jeb *papildinājumu* sauksim grafu $\overline{\Gamma}$, kurā divas virsotnes ir savienotas tad un tikai tad, ja tās nav savienotas grafā Γ.

1.1. piemērs. 3.11.attēla grafa (a) papildgrafs ir grafs (b).



3.11. attēls. Grafa un tā papildgrafa piemērs

1.2.5. Staigāšana pa grafu

Uzdevumu risināšanā ir lietderīgi domāt par grafu kā par transporta vai sazināšanās tīkla modeli, tāpēc ir jādefinē vienkāršākie jēdzieni, kas ir saistīti ar pārejām starp virsotnēm.

Par *maršrutu* grafā sauksim virsotņu un šķautņu virkni

$$(v_0, e_1, ..., e_n, v_n),$$

kur jebkuras divas kaimiņu virsotnes v_i un v_{i+1} ir savienotas ar šķautni e_{i+1}. Ja maršrutā $v_0 = v_n$, tad tādu maršrutu sauksim par *noslēgtu*, pretējā gadījumā, kad $v_0 \neq v_n$ - par *vaļēju*, šķautņu skaitu maršrutā sauksim par tā *garumu*;

Maršrutu, kurā visas šķautnes ir dažādas, sauksim par *ķēdi*;

Ķēdi, kurā visas virsotnes izņemot, iespējams, pirmo un pēdējo, ir dažādas, sauksim par *vienkāršu ķēdi*;

Noslēgtu ķēdi ar pozitīvu garumu sauksim par *ciklu*, noslēgtu vienkāršu ķēdi ar pozitīvu garumu sauksim par *vienkāršu ciklu*.

Maršrutu (ķēdi, vienkāršu ķēdi), kura pirmā virsotne ir v un pēdējā - w, sauksim par (v, w) - *maršrutu (ķēdi, vienkāršu ķēdi)*.

Par vienkāršu ķēdi vai vienkāršu ciklu ir lietderīgi domāt kā par grafa apakšgrafu, kas satur atbilstošās virsotnes un šķautnes starp virsotnēm.

Analoģiski maršruta, ķēdes un cikla jēdzienus definē orientētiem grafiem. Par *virzītu maršrutu* orientētā grafā sauksim virsotņu un šķautņu virkni $(v_0, e_1, ..., e_n, v_n)$, kur jebkuras divas virsotnes v_i un v_{i+1} ir savienotas ar (orientēto) šķautni e_{i+1}. Līdzīgā veidā definēsim arī virzītu ķēdi, vienkāršu ķēdi, ciklu un vienkāršu ciklu.

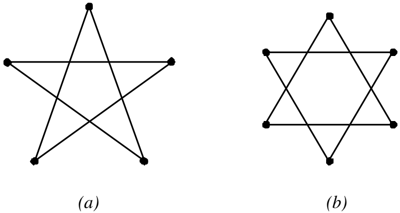
1.2.6. Sakarīgums

Grafu sauksim par *sakarīgu*, ja eksistē ķēde starp jebkurām divām virsotnēm.

Maksimālu sakarīgu apakšgrafu sauksim par grafa *sakarības komponenti*.

Var redzēt, ka grafs ir sakarīgs tad un tikai tad, ja eksistē virsotne v tāda, ka jebkurai citai virsotnei u eksistē maršruts $(u, ..., v)$.

1.2. piemērs. 3.12.attēla grafs (a) ir sakarīgs un grafs (b) nav sakarīgs un satur 2 komponentes.



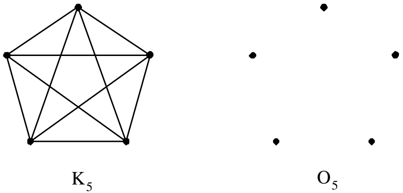
3.12. attēls. Sakarīga un nesakarīga grafa piemēri

1.3. Speciālas grafu klases

Par *triviālo grafu* sauksim grafu ar vienu virsotni un bez šķautnēm. Par *tukšo grafu* sauksim "grafu", kura virsotņu un šķautņu kopas ir tukšas.

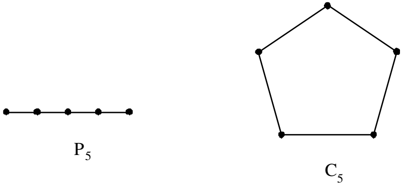
Pilnais grafs K_n - (neorientēts) grafs ar n virsotnēm, visi virsotņu pāri savā starpā ir savienoti.

Bezšķautņu grafs O_n - (neorientēts) grafs ar n virsotnēm un 0 šķautnēm.



3.14. attēls. Pilna grafa un bezšķautņu grafa piemēri

Ķēde P_n - sakarīgs grafs ar n virsotnēm, kur divām virsotnēm pakāpe ir 1 un pārējām pakāpe ir 2. *Cikls* C_n - sakarīgs grafs ar n virsotnēm, kur katrai virsotnei pakāpe ir 2.



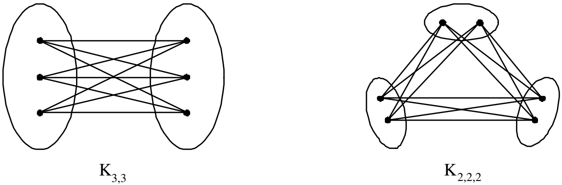
3.15. attēls. Ķēdes un cikla piemēri

Divdaļīgs grafs - grafs, kura virsotņu kopu var sadalīt divās daļās tā, ka jebkuras divas virsotnes, kas pieder vienai daļai, nav savienotas.

Pilns divdaļīgs grafs $K_{n,m}$ - divdaļīgs grafs, kura virsotņu kopas daļu elementu skaits ir n un m un kurā jebkuras divas virsotnes dažādās daļās ir savienotas.

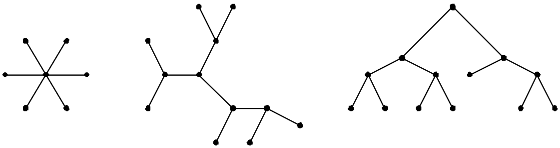
m-daļīgs grafs - grafs, kura virsotnes var sadalīt m daļās tā, ka jebkuras divas virsotnes, kas pieder vienai daļai, nav savienotas.

Pilns m-daļīgs grafs $K_{n_1,\dots,n_m}$ - m daļīgs grafs, kura virsotņu kopas daļu elementu skaits ir $n_1, \dots, n_m$, jebkuras divas virsotnes dažādās daļās ir savienotas.



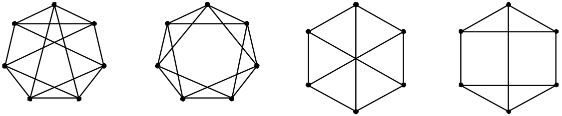
3.17. attēls. 2-daļīga un 3-daļīga grafa piemēri

Koks - sakarīgs grafs bez inducētiem apakšgrafiem, kas ir cikli (sakarīgs *aciklisks* grafs). *Mežs* - grafs bez cikliem (ne obligāti sakarīgs).



3.19. attēls. Mežs

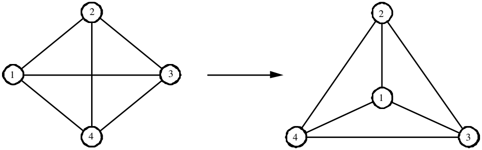
Regulārs grafs - grafs, kura visām virsotnēm ir vienāda pakāpe. Ja regulāra grafa virsotnes pakāpe ir k, tad to sauksim par k-regulāru grafu. Katram n atbilstošais cikls C_n un pilnais grafs K_n ir regulāri grafi.



3.20. attēls. 3-regulāru un 4-regulāru grafu piemēri ar 6 un 7 virsotnēm

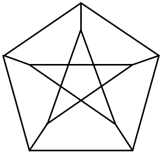
Plakans grafs - grafs, kas ir uzzīmēts tā, ka šķautnēm ir kopīgi punkti tikai virsotnēs.

Planārs grafs - grafs, kuru var uzzīmēt kā plakanu grafu (*plakanizēt*).



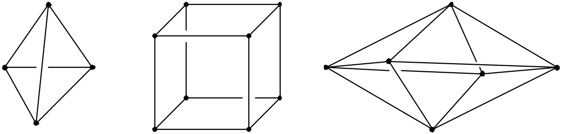
3.21. attēls. Planāra grafa plakanizācijas piemērs

Ir atrasti un pētīti vairāki interesanti grafi, kas ir nosaukti to atklājēju vārdos. Populārākais no šādiem grafiem ar nelielu virsotņu skaitu ir *Petersena grafs*:

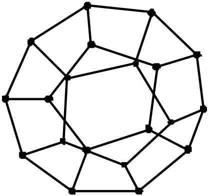


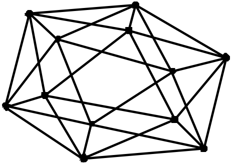
3.22. attēls. Petersena grafs

Regulāro daudzskaldņu grafi tiek iegūti no tā saucamajiem regulārajiem daudzskaldņiem (tetraedrs, kubs, oktaedrs, dodekaedrs, ikosaedrs), kur katram atbilst grafs, kura virsotnes un šķautnes atbilst figūras ģeometriskajām virsotnēm un šķautnēm.



Tetraedra grafs Kuba grafs Oktaedra grafs





3.23. attēls. Regulāro daudzskaldņu grafi

1.4. Operācijas ar grafiem

Grafu teorijā bieži rodas nepieciešamība veidot jaunus grafus no jau uzdotiem. Apskatīsim dažas operācijas ar grafiem.

Papildināšana. Šī operācija jau tika definēta.

Apvienošana. Ja doti 2 grafi $\Gamma = (V, E)$ un $\Gamma' = (V', E')$, tad par to apvienojumu sauksim grafu

$$\Gamma \cup \Gamma' = (V \cup V', E \cup E').$$

Piemēram, var redzēt, ka katrs grafs ir tā komponenšu apvienojums.

Virsotnes (virsotņu kopas) izdzēšana. Grafā tiek izdzēsta virsotne (virsotņu kopa) un visas tai incidentās šķautnes, virsotņu kopas U izdzēšanu grafā $\Gamma = (V, E)$ apzīmēsim ar $\Gamma - U$, tādējādi

$$\Gamma - U = (V \backslash U, E \backslash \{(u, v) \cup (v, u) | u \in U, v \in V\}).$$

Šķautnes (šķautņu kopas) izdzēšana. Grafā tiek izdzēsta šķautne vai šķautņu kopa, šķautņu kopas S izdzēšanu grafā $\Gamma = (V, E)$ apzīmēsim ar $\Gamma - S$, tādējādi

$$\Gamma - S = (V, E \backslash S).$$

Šķautnes savilkšana. Virsotnes, kas incidentas ar doto šķautni, tiek apvienotas vienā virsotnē, šķautnes e savilkšanu grafā Γ apzīmēsim ar Γ/e.

Šķautnes pievienošana. Tiek pievienota šķautne, kas savieno divas izvēlētas nesavienotas virsotnes, šķautnes e pievienošanu grafā Γ apzīmēsim ar $\Gamma + e$.

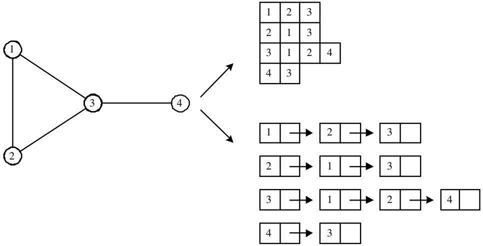
1.5. Datu struktūras grafu uzdošanai

Grafus, tāpat kā jebkurus citus matemātiskus objektus, ir jāprot pilnvērtīgi un ekonomiski iekodēt ar piemērotu diskrētās matemātikas objektu palīdzību.

1.5.1. Virsotņu blakusattiecības saraksts

Katrai virsotnei piekārtosim visas virsotnes, kas ar to ir savienotas.

Praktiski blakusattiecības sarakstu realizē divdimensionāla masīva vai saistītā saraksta veidā.

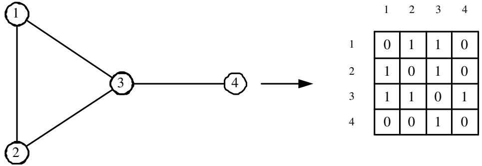


3.24. attēls. Grafa uzdošana ar blakusattiecības sarakstu

Blakusattiecības saraksts praktiski (programmēšanā) tiek izmantots visbiežāk.

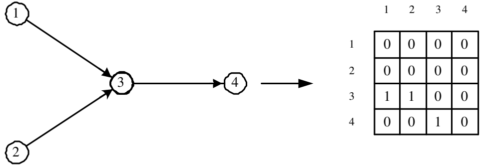
1.5.2. Virsotņu blakusattiecības matrica

Grafu uzdod ar $|V| \times |V|$ bināru matricu, kurā rindas un kolonnas tiek indeksētas ar grafa virsotnēm noteiktā kārtībā, matricas rūtiņā, kas atbilst rindai u un kolonnai v tiek ierakstīts 1, ja virsotnes u un v ir savienotas, un 0, ja tās nav savienotas.



3.25. attēls. Neorientēta grafa uzdošana ar blakusattiecības matricu

Orientēta grafa gadījumā rūtiņā tiek ierakstīts 1 tad un tikai tad, ja eksistē šķautne (v, u) (no v uz u).



3.26. attēls. Orientēta grafa uzdošana ar blakusattiecības matricu

Orientēta nosvērta grafa gadījumā rūtiņā tiek ierakstīts skaitlis w tad un tikai tad, ja eksistē šķautne (v, u) ar svaru w, pārējās rūtiņās tiek ierakstīta 0 tāpat kā iepriekšējos gadījumos;

Matricas biežāk izmanto grafu teorētiskos pētījumos.

1.6. Grafu pielietojumi modelēšanā

1.6.1. Modeļu teorija

Jebkuras dabas un izcelsmes sistēmas vai procesa uzdošanu matemātisku objektu un sakarību veidā sauksim par šīs parādības *modeli*.

Modelis ir realitātes vienkāršota un jēdzieniski noslēgta abstrakta uzdošana.

Modeļi tiek veidoti ar mērķi labāk saprast doto sistēmu. Pietiekoši sarežģītas sistēmas vispār nav iespējams analizēt bez vienkāršotu modeļu palīdzības.

Sistēmas pētīšanu, pārnesot tās īpašības uz modeli, sauksim par sistēmas *modelēšanu*.

Modelēšanas pamatprincipi ir šādi:

1) modeļa izvēle būtiski ietekmē uzdevuma atrisinājuma procesu un pašu atrisinājumu;
2) modeļu detalizācijas pakāpes var būt dažādas;
3) sīkāka detalizācijas pakāpe nozīmē lielāku modeļu precizitāti un sarežģītību;
4) ir vēlams izmantot vienlaicīgi vairākus modeļus.

Galvenie grafu modeļu tipi ir šādi:

- **materiālas sistēmas modelis** - virsotnes un šķautnes ir fiziski objekti, šķautņu objekti fiziski saista virsotņu objektus;

- **sistēmas abstraktu īpašību modelis** - virsotnes ir fiziski vai nefiziski objekti, šķautnes saista virsotnes atkarībā no to abstraktajām īpašībam;
- **procesa modelis** - virsotnes ir fiziski vai nefiziski objekti, iespējams, dažādos laika vai attīstības stāvokļos, šķautnes norāda virsotņu evolucionāro vai cēloņsakarisko atkarību.

Lai izveidotu efektīvu dotās sistēmas/procesa grafu modeli, ir

1) jānosaka svarīgākās dotās modelējamās sistēmas apakšsistēmas/ stāvokļi, kas tiks definētas kā grafa virsotnes;
2) jānosaka svarīgākās modelējamās attiecības starp virsotņu objektiem, attiecības var saistīt sistēmas daļas vai stāvokļus (laikā vai attīstībā).

Pēc modeļa izveidošanas tiek risināti uzdevumi, kas attiecas uz modelējamo sistēmu.

1.6.2. Grafu modeļu piemēri

Zemāk ir pārskaitīti daži konkrēti (vairāk vai mazāk nopietni) grafu modeļi:

1. *matemātiskas teorijas apgalvojumu grafs* (virsotnes - apgalvojumi, šķautnes - loģiskās secināšanas);
2. *funkcionālais grafs* (virsotnes - kopas elementi, šķautnes - funkcijas darbība);
3. *lielumu-sakarību grafs* (virsotnes - skaitliski lielumu un sakarības starp tiem, šķautnes - lieluma piedalīšanās sakarībā);
4. *metrikas grafs* (virsotnes - jebkura veida fiziski vai nefiziski objekti vai to kopas, šķautnes - objektu ģeometriskā, strukturālā, funkcionālā vai evolucionārā tuvība, pielieto lielu kopu analīzē);
5. *varbūtiskā procesa grafs* (virsotnes - sistēmas stāvokļi, šķautnes - pārejas starp stāvokļiem, kuras raksturo to varbūtība);
6. *lēmumu koks* (virsotnes - krīzes stāvokļi, šķautnes - lēmumi, izmanto lēmumu pieņemšanā ekonomikā, vadīšanā, inženierkonstrukciju diagnosticēšanā u.c.);

7. *sistēmas grafs* (virsotnes - sistēmas komponentes, šķautnes - komponenšu mijiedarbība, pielieto sistēmu projektēšanā un analīzē);
8. *cēloņsakarības grafs* (virsotnes - kādas sistēmas stāvokļi vai parametri, orientētas šķautnes - cēloņsakarības, izmanto lielu sistēmu vai kompleksu procesu pētīšanā);
9. *spēles grafs* (virsotnes - spēles stāvokļi, šķautnes - spēles noteikumu atļautas pārejas (gājieni) starp stāvokļiem, pielieto spēļu uzvarošo stratēģiju izstrādāšanā);
10. *datortīkls* (vispārīgā gadījumā - komunikāciju tīkls) (virsotnes - datori vai komunikāciju mezgli, šķautnes - sakaru līnijas, pielieto datortīklu projektēšanā un analīzē);
11. *sociālais grafs* (virsotnes - cilvēki vai to kopas, šķautnes - pazīšanās, ekonomiskas vai cita veida attiecības, pielieto sabiedrības analīzē un attīstības plānošanā);
12. *organizācijas grafs* (virsotnes - cilvēki vai to kopas, šķautnes - attiecības, kas raksturo organizācijas struktūru);

13. *projekta grafs* (virsotnes - projekta darbi vai stāvokļi, šķautnes - attiecības starp darbiem vai darbi, kas saista stāvokļus);
14. *darbinieku-pienākumu grafs* (virsotnes - darbinieki un pienākumi vai darbi, šķautnes - attiecības, kas darbiniekiem piekārto to iespējamos pienākumus);
15. *makroekonomiskais finanšu plūsmas grafs* (virsotnes - tautsaimniecības nozares, šķautnes - finanšu plūsmas starp nozarēm, pielieto ekonomiskos pētījumos un plānošanā);
16. *juridisko normu grafs* (virsotnes - likumi u.c. juridiskās normas, šķautnes - juridisko normu savstarpējā atkarība, pielieto juridisko procesu plānošanā);
17. *ceļu grafs* (virsotnes - pilsētas, šķautnes - ceļi);
18. *ielu grafs* (virsotnes - krustojumi, šķautnes - ielas);
19. *molekulas grafs* (virsotnes - atomi, šķautnes - ķīmiskās saites);
20. *elektriskās ķēdes grafs* (virsotnes - elektromagnētiski aktīvi elementi, šķautnes - vadi vai kontakti);

21. *"barošanās ķēde"* (virsotnes - dzīvnieku sugas, šķautnes - "barošanās" attiecība, pielieto biosistēmu analīzē);
22. *evolucionārais (filoģenētiskais) koks* (virsotnes - sugas vai populācijas, šķautnes - evolucionārās izcelsmes attiecība);
23. *ķīmiskās vielas priekšteču grafs* (virsotnes - ķīmiskas vielas, kuras tiek iegūtas kādas vielas ražošanas procesā (priekšteči), šķautnes - priekšteču izmaiņas ražošanas procesā);
24. *orgānu atkarības grafs* (virsotnes - cilvēka iekšējie orgāni, šķautnes - atkarība starp orgāniem, pielieto medicīnā);
25. *asinsvadu grafs* (virsotnes - asinsvadu sazarojumi, šķautnes - asinsvadi).
26. *kulinārijas izstrādājuma gatavošanas grafs* (virsotnes - kulinārijas izstrādājuma stāvokļi (sākot no pamatkomponentēm), šķautnes - pārejas starp stāvokļiem gatavošanas procesā, pielieto ēdienu gatavošanā).

2. 6.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

6.1 Cik ir dažādu katra tipa (neorientētu, orientētu, orientētu ar cilpām) grafu ar n virsotnēm? Cik ir dažādu katra tipa grafu ar n virsotnēm un m šķautnēm?

6.2 Pierādīt, ka katrā sakarīgā grafā ir vismaz divas virsotnes, kuru izdzēšana nepadara grafu par nesakarīgu.

6.3 Pierādīt, ka neeksistē grafs ar piecām virsotnēm, kuru pakāpes ir $2, 4, 4, 4, 4$.

6.4 Pierādīt, ka ja grafā Γ ir vismaz 6 virsotnes, tad vai nu Γ vai $\overline{\Gamma}$ satur trijstūri.

6.5 Izmantojot grafu teoriju atrisināt klasisko uzdevumu par vilku, kazu un kāpostu (cilvēkam laivā jāpārved pāri upei šie trīs objekti, laivā bez cilvēka var būt tikai viens objekts...).

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

6.6 Pierādīt, ka eksistē grafs ar $2n$ virsotnēm, kuru pakāpes ir

$$1, 1, 2, 2, ..., n, n.$$

6.7 Pierādīt, ka ja grafā Γ ir vismaz 18 virsotnes, tad vai nu Γ vai $\overline{\Gamma}$ satur K_4.