DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

5.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt veidotājfunkciju metodes pamatus.

Lekcijas kopsavilkums:

- kombinatorikas uzdevumus var risināt izmantojot veidotājfunkcijas.

Svarīgākie jēdzieni: veidotājfunkcija, eksponenciāla veidotājfunkcija, kombinatoriskā klase, veidotājfunkciju summa un reizinājums, Katalāna skaitļi.

Svarīgākie fakti un metodes: skaitošo veidotājfunkciju konstruēšana, veidotājfunkciju summas un reizinājuma kombinatoriskā interpretācija, virkņu kopas, apakškopu veidotājfunkcijas atrašana, iezīmēto objektu kopas veidotājfunkcija.

1. Veidotājfunkciju metode

1.1. Pamatfakti

1.1.1. Definīcijas

Veidotājfunkcija ir matemātiska konstrukcija, kas kompaktā veidā satur informāciju par doto kombinatorikas uzdevumu kopumā.

Ja ir dota skaitļu virkne $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ (piemēram, kādas diskrētu objektu klases $\{\mathcal{A}_n\}$ *skaitošā funkcija*), tad

- $A(x) = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$ - *veidotājfunkcija*
- $A_{exp}(x) = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n!}\right) x^n$ - *eksponenciālā veidotājfunkcija.*

Divas veidotājfuncijas sauksim par vienādām jeb *formāli vienādām*, ja attiecīgie koeficienti pie vienādām argumenta pakāpēm ir vienādi.

Ja ir dota veidotājfunkcija $A(x)$, tad ar $[x^n]A(x)$ apzīmē tās koeficientu pie x^n.

1.1.2. Teilora rindas

Veidotājfunkcija $A(x)$ var tikt interpretēta kā Teilora rinda punkta $x = 0$ apkārtnē. Ja ir iespējams, veidotājfunkciju ir jāmēğina pierakstīt elementāras funkcijas veidā.

Veidotājfunkcijas konverğence vai konverğences rādiuss klasiskajā nozīmē parasti kombinatorikā nespēlē izšķirošo lomu.

Ja $f(x)$ ir bezgalīgi daudzas reizes atvasināma funkcija un kādā punkta $x = 0$ apkārtnē var tikt izvirzīta pakāpju rindā

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \implies a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Izmantojot Teilora rindu teoriju virknes veidotājfunkciju var identificēt ar tās kompakto pierakstu elementāras funkcijas veidā.

1.1.3. Vairāku argumentu veidotājfunkcijas

Veidotājfunkcijas ideju var vispārināt uz virknēm, kas ir atkarīgas no vairākiem indeksiem. Ja ir dota skaitļu virkne $\{a_{i_1,...,i_n}\}_{i_j \in \mathbb{N}}$, kas ir atkarīga no n naturāliem indeksiem, tad formālu pakāpju rindu

$$A(x_1, ..., x_n) = \sum_{i_1>0,...,i_n>0} a_{i_1,...,i_n} x_1^{i_1} ... x_n^{i_k}$$

sauksim par virknei atbilstošo *daudzargumentu veidotājfunkciju*.

1.1. piemērs. $\dfrac{1}{1-y-xy} = \dfrac{1}{1-(1+x)y} = 1+(1+x)y+(1+x)^2y^2+ ... = \sum\limits_{n\geq 0}(1+x)^n y^n = \sum\limits_{n\geq 0}(\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m x^m)y^n.$

1.2. Veidotājfunkciju pielietojumi kombinatorikā

1.2.1. Rekurento sakarību risināšana

Rekurento sakarību risināšana, izmantojot veidotājfunkcijas, parasti notiek pēc šāda algoritma:

1) rekurentās sakarības un sākuma nosacījumi tiek pārveidoti nosacījumos, kurus apmierina veidotājfunkcijas;
2) tiek atrastas veidotājfunkcijas vai izdarīti iespējamie secinājumi par to dabu;
3) izmantojot Teilora rindu teoriju, tiek atrasti veidotājfunkciju koeficienti.

1.2. piemērs. Lineāru rekurentu sakarību risināšana ar veidotājfunkciju metodi.

1.2.2. Veidotājfunkciju konstruēšana skaitīšanas mērķiem

Kombinatorikas uzdevumi var tikt risināti izmantojot veidotājfunkcijas, vadoties pēc šāda algoritma:

1. tiek konstruēta veidotājfunkcija $A(x)$, kuras koeficientus a_n var interpretēt kā dotā kombinatorikas uzdevuma atrisinājumus;
2. veidotājfunkcija $A(x)$ tiek pārveidota un/vai vienkāršota;
3. koeficienti a_n tiek atrast izmantojot, piemēram, Teilora rindu teoriju.

1.3. piemērs. Ko skaita funkcija

$$(1 + x + x^2 + x^3 + ...)(1 + x + x^2)?$$

Atverot iekavas, locekļi ir formā $x^{a_1}x^{a_2} = x^{a_1+a_2}$, kur $0 \leq a_1$, $0 \leq a_2 \leq 3$. Seko, ka koeficients pie x^n ir vienādojuma $a_1 + a_2 = n$ veselu atrisinājumu skaits, kur $0 \leq a_1$, $0 \leq a_2 \leq 3$.

1.4. piemērs. 20 identiski datori tiek sadalīti pa 5 istabām tā, ka katrā istabā ir vismaz 2 un ne vairāk kā 7 datori. Cik veidos to var izdarīt?

Skaitošā veidotājfunkcija ir

$$(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7)^5$$

Jāatrod koeficients pie x^{20}.

1.5. piemērs. Sadalījumu skaita $p(n)$ veidotājfunkcija ir

$$(1 + x + x^2 + ...)(1 + x^2 + x^4 + ...)(1 + x^3 + x^6 + ...) = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x^i}.$$

Reizinājuma saskaitāmie pēc iekavu atvēršanas ir formā $x^{a_1} x^{2a_2} x^{3a_3} ...$ Koeficients pie x^n ir vienādojuma

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... = n$$

atrisinājumu skaits naturālos skaitļos - n sadalījumu skaits naturālu skaitļu summā.

1.6. piemērs. Apzīmēsim ar $q(n)$ naturāla skaitļa n sadalījumu skaitu summās ar dažādiem naturāliem saskaitāmiem. $q(n)$ veidotājfunkcija ir

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)... = \prod_{i \geq 1} (1+x^i).$$

1.3. Operācijas ar veidotājfunkcijām un to kombinatoriskā interpretācija

No diskrētu objektu saimēm jeb *kombinatoriskajām klasēm* var konstruēt citu, sarežģītāku diskrētu objektu saimes, veicot kopu teorētiskās un citas operācijas.

Lai skaitītu šādus jaunizveidotus objektus, var mēģināt veikt tādas operācijas ar veidotājfunkcijām, kas iekodē operācijas ar skaitāmajiem objektiem. Operācijas ar veidotājfuncijām var būt ar algebrisku vai analītisku raksturu.

Tālāk mēs izmantosim kombinatorisko klašu terminoloģiju:

- kombinatoriskā klase - $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_n\}$,

- ja $a \in \mathcal{A}_n$, tad teiksim, ka objekta a *izmērs* $|a|$ ir vienāds ar n,
- par kombinatoriskās klases $\mathcal{A}$ skaitošo virkni sauksim virkni $\{a_n\} = \{|\mathcal{A}_n|\}$,
- objekti sastāv no *atomiem*, visbiežāk atomi ir kopu elementi, simboli u.c.

1.3.1. Summa

Divu veidotājfunkciju summu definē šādi:

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n.$$

Ja ir dotas divas kombinatoriskās klases

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_n\},$$
$$\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_n\},$$

kurām izpildās nosacījums $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$, tad par to summu sauksim klasi

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}.$$

Par objekta $c \in \mathcal{C}$ izmēru sauksim tā izmēru sākotnējā klasē.

$$\Longrightarrow \ |\mathcal{C}_n| = |\mathcal{A}_n| + |\mathcal{B}_n|,$$
$$\Longrightarrow \ C(x) = \sum_{n \geq 0} |\mathcal{C}_n| x^n = \sum_{n \geq 0} (|\mathcal{A}_n| + |\mathcal{B}_n|) x^n = A(x) + B(x).$$

Veidotājfunkciju summa skaita kombinatorisko klašu apvienojuma objektus.

1.3.2. Reizinājums

Divu veidotājfunkciju reizinājumu definē kā pakāpju rindu formālu reizinājumu, atverot iekavas:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

kur $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.

Ja ir dotas divas kombinatoriskās klases

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_n\},$$
$$\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_n\},$$

tad par to reizinājumu sauksim klasi

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}.$$

Par objekta $c = (a, b) \in \mathcal{C}$ izmēru sauksim lielumu

$$|c| = |a| + |b|.$$

Redzam, ka saskaņā ar reizināšanas un summas likumu

$$|\mathcal{C}_n| = |\mathcal{A}_0||\mathcal{B}_n| + |\mathcal{A}_1||\mathcal{B}_{n-1}| + ... + |\mathcal{A}_n||\mathcal{B}_0| = \sum_{i=0}^{n} |\mathcal{A}_i||\mathcal{B}_{n-i}|,$$

tāpēc

$$C(x) = \sum_{n\geq 0} |\mathcal{C}_n|x^n = \left(\sum_{n\geq 0} |\mathcal{A}_n|x^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} |\mathcal{B}_n|x^n\right) = A(x)B(x).$$

Veidotājfunkciju reizinājums skaita kombinatorisko klašu reizinājuma objektus.

1.7. piemērs. *Katalāna skaitļi* C_n. Cik veidos var *triangulēt* (sadalīt trijstūros ar diagonālēm, tā lai tās nekrustotos) $n+2$-stūri (fiksētu)?

Definēsim $C_0 = 1, C_1 = 1$. Redzam, ka $C_2 = 2, C_3 = 5$.

Pierādīsim, ka visiem $n \geq 1$ izpildās rekurenta sakarība

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}.$$

$n = 1 \implies$ vienādība izpildās: $C_1 = 1 = C_0 C_0$.

$n = 2 \implies$ vienādība izpildās: $C_2 = 2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 1 + 1 = 2$.

n ir patvaļīgs $\implies$ fiksēsim vienu $n+2$-stūra malu. Ievērosim šādus faktus:

- šī mala ir viena no kāda trijstūra T malām,

- visa triangulācija sastāv no sakārtotas virknes (X_1, T, X_2), kur X_1 ir kāda triangulācija $k+2$-stūrim un X_2 ir kāda triangulācija $n+1-k$-stūrim (skaitām atlikušās virsotnes),
- $0 \leq k \leq n-1$,
- kopējais triangulāciju skaits ar fiksētu $k+2$ ir vienāds ar

$$C_k C_{n-1-k},$$

- kopējais triangulāciju skaits C_n saskaņā ar summas likumu ir vienāds ar

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}.$$

Apskatīsim atbilstošo veidotājfunkciju

$$C(x) = \sum_{n \geq 0} C_n x^n.$$

Salīdzināsim veidotājfunkcijas $C(x)$ un $C^2(x)$.

Redzam, ka

$$C^2(x) = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + ...+)(C_0 + C_1x + C_2x^2 + ...+) =$$
$$(C_0C_0) + (C_0C_1 + C_1C_0)x + (C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0)x^2 + ... =$$
$$C_1 + C_2x + C_3x^2 + ...$$

$\Longrightarrow$ $C^2(x)x + 1 = C(x)$. Atrisinot attiecībā uz $C(x)$, iegūstam

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Jāņem "mīnus" zīme. Tālāk izvirzām Teilora rindā un iegūstam, ka

$$C_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n.$$

1.3.3. Virknes

Apzīmēsim ar $\mathcal{E}$ kombinatorisku klasi, kurai ir tikai viens elements ar izmēru 0 (*tukšā objekta klase*).

Ir dota kombinatoriska klase $\mathcal{A}$, kurai $\mathcal{A}_0 = \varnothing$. Tās elementu virkņu kopa SEQ($\mathcal{A}$) ir izsakāma veidā

$$\mathrm{SEQ}(\mathcal{A}) = \mathcal{E} \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^2 \cup \mathcal{A}^3 \cup \ldots$$

Redzam, ka SEQ($\mathcal{A}$) veidotājfunkcija $SA(x)$ ir vienāda ar

$$1 + A(x) + A^2(x) + \ldots = \frac{1}{1 - A(x)}.$$

1.8. piemērs. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$ un $|\mathcal{A}_1| = n$. Tad $A(x) = nx$ un

$$SA(x) = \frac{1}{1 - nx}.$$

1.3.4. Apakškopu kopas veidotājfunkcija

Ir dota kombinatoriska klase $\mathcal{A}$. Tās elementu apakškopa kopa PSET($\mathcal{A}$) ir izsakāma veidā

$$\mathrm{PSET}(\mathcal{A}) = (\varnothing + \{a_1\}) \times (\varnothing + \{a_2\}) \ldots = \prod_{a \in \mathcal{A}} (\varnothing + \{a\})$$

($\forall$ elementu a var vai nu iekļaut vai arī neiekļaut apakškopā).

Redzam, ka PSET($\mathcal{A}$) veidotājfunkcija $PA(x)$ ir vienāda ar

$$\prod_{a\in\mathcal{A}}(1+x^{|a|}) = \prod_{n\geq 1}(1+x^n)^{a_n}.$$

1.3.5. Iezīmēšana

Veidotājfunkcijas atvasināšana tiek definēta šādi:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

Ir dota kombinatoriska klase $\mathcal{A}$. Tās *iezīmēto objektu klase* $\mathcal{B} = \Theta(\mathcal{A})$ ir klase, kuras elementi ir $\mathcal{A}$ elementi ar vienu iezīmētu atomu.

Iezīmēt vienu atomu objektam $a \in \mathcal{A}_n$ nozīmē uzdot pāri (a, i), kur $i \in \{1, ..., n\}$ ir iezīmētā atoma kārtas numurs fiksēta atomu sakārtojumā. $\Longrightarrow$ $|\mathcal{B}_n| = n|\mathcal{A}_n|$ $\Longrightarrow$ $B(x) = xA'(x)$.

1.9. piemērs. Cik veidos no n elementu kopas var izvēlēties komandu un treneri (treneris var būt arī komandas loceklis). Bināru virkņu terminos - cik ir bināru virkņu ar garumu n un vienu iezīmētu elementu?

Atradīsim meklējamās virknes veidotājfunkciju. Zinām, ka bināru virkņu skaita veidotājfunkcija ir

$$A(x) = \frac{1}{1-2x},$$

tāpēc meklējamā veidotājfunkcija ir

$$B(x) = x\left(\frac{1}{1-2x}\right)' = \frac{2x}{(1-2x)^2}.$$

1.3.6. Daži triki

Atzīmēsim vēl dažus lietderīgus trikus, kurus izmanto darbā ar veidotājfunkcijām:

- $A(x) \to A(x) - a_n x^n$ - n-tā koeficienta anulēšana, iegūstam virkni
$$(a_0, a_1, ..., a_{n-1}, 0, a_{n+1}, ...);$$
- $A(x) \to A(x^2)$ - koeficientu "izretināšana", iegūstam virkni
$$(a_0, 0, a_1, 0, ...);$$
- $A(x) \to \dfrac{A(x) - a_0}{x}$ - koeficientu nobīde negatīvajā virzienā par vienu vienību, iegūstam virkni
$$(a_1, a_2, ...);$$
- $A(x) \to \int\limits_0^x A(t)dt$ - koeficientu dalīšana ar naturāliem skaitļiem, iegūstam virkni
$$(0, a_1/2, a_2/3, ...);$$

2. 5.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

5.1 Atrast veidotājfunkciju augļu kopu skaitam, kas satur ābolus, apelsīnus, mandarīnus un banānus (katras šķirnes augļi ir neatšķirami), ja ābolu skaits ir nepara skaitlis, apelsīnu skaits ir pāra skaitlis, mandarīnu skaits ir starp 3 un 8, ir vismaz viens banāns.

5.2 Atrast, cik veidos var izmainīt n santīmus izmantojot neierobežotu skaitu Latvijā 2013.gadā piejamo monētu (pastāv 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200 santīmu monētas).

5.3 Atrast veidotājfunkciju virknei $\{b_n\}$, ja veidotājfunkcija virknei $\{a_n\}$ ir zināma un ir spēkā sakarība $b_n = a_{n+1} - a_n$.

5.4 Apzīmēsim ar a_n visu iespējamo virkņu (bez atkārtojumiem, ieskaitot tukšo virkni) skaitu, kuras var izveidot no n-kopas elementiem, definēsim $a_0 = 1$. Pierādiet, ka ir spēkā rekurenta sakarība

$$a_n = na_{n-1} + 1,$$

atrodiet virknes $\{a_n\}$ eksponenciālo veidotājfunkciju.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

5.5 Pieņemsim, ka $A(x)$ ir veidotājfunkcija ar konstanto locekli 1. Pierādīt, ka eksistē $A(x)$ *inversā veidotājfunkcija* - veidotājfunkcija $B(x)$ tāda, ka $A(x)B(x) = 1$ un atrast rekurento sakarību inversās veidotājfunkcijas koeficientiem.

5.6 Definēsim *harmoniskos skaitļus* ar šādiem nosacījumiem:

$$h_0 = 0, h_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Pierādīt, ka harmoniskie skaitļi apmierina šādas rekurentas sakarības visiem $n \geq 1$:

(a) $\sum_{i=1}^{n} h_i = (n+1)(h_{n+1} - 1)$,

(b) $\sum_{i=1}^{n} ih_i = C_{n+1}^2(h_{n+1} - \frac{1}{2})$,

(c) $\sum_{i=1}^{n} C_i^k h_i = C_{n+1}^{k+1}(h_{n+1} - \frac{1}{k+1})$.

Pierādīt, ka harmonisko skaitļu virknes veidotājfunkcija ir vienāda ar

$$\frac{1}{1-x} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right).$$