DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

4.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt rekurento sakarību metodi un vienkāršākās to risināšanas metodes.

Lekcijas kopsavilkums:

- kombinatorikas uzdevumus var risināt meklējot rekurentas sakarības skaitošajai virknei un tās veidotājfunkcijai.

Svarīgākie jēdzieni: rekurenta sakarība (k-tās kārtas, lineāra).

Svarīgākie fakti un metodes: klasisko kombinatorisko skaitļu rekurentās sakarības, lineāro rekurento sakarību risināšana ar veidotājfunkciju metodi, lineāru homogēnu rekurentu sakarību risināšana ar raksturīgā vienādojuma metodi.

1. Rekurento sakarību metode

1.1. Pamatdefinīcijas

Ievads

Risinot kombinatorikas uzdevumus, nereti rodas situācija, kad ir grūti uzreiz saskatīt atbildi vai pat hipotēzi.

Nereti kombinatorikas uzdevumu var formulēt kā virknes $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ vispārīgā locekļa a_n atkarību no n.

Lietderīga šādu uzdevumu risināšanas stratēģija ir šāda: atrast virknes vispārīgā locekli a_n kā funkciju no iepriekšējiem šīs virknes locekļiem un mēģināt izdarīt pietiekoši daudz secinājumu, lai atrastu atbildi - a_n atkarības veidu no n.

Šī ideja ir kombinatorikas pamatprincipa "skaldi un valdi" pielietošanas piemērs. Informāciju par saistību starp a_n un iepriekšējiem virknes locekļiem parasti iegūst pētot to, kā skaitāmie objekti ar indeksu n tiek veidoti no mazākiem objektiem.

Realizējot šādu stratēģiju, ir nepieciešams arī atrast dažu (parasti dažu pirmo) virknes locekļu vērtības - "sākuma nosacījumus".

Rekurento sakarību metodes ideja

1. meklēt *rekurentas sakarības*

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1),$$

   to sistēmas un sākuma nosacījumus a_0, a_1,... vērtības;
2. pēc tam atrast a_n, neizmantojot iepriekšējās a_i vērtības, vēlams izmantot **veidotājfunkcijas**.

Rekurentās sakarības tiek meklētas

- sadalot skaitāmās kopas objektus ar indeksu n mazākās daļās,
- pētot, kā objekti ar indeksu n ir atkarīgi no objektiem ar indeksu $n-1, n-2, ...$.

Rekurento sakarību speciālgadījumi

Rekurentu sakarību sauc par

- *k-tās kārtas* rekurentu sakarību, ja a_n var izteikt, izmantojot $a_{n-1}, ..., a_{n-k}$.
- *homogēnu*, ja nulles virkne

$$a_0 = a_1 = ... = a_n = ... = 0$$

ir tās atrisinājums, pretējā gadījumā rekurentu sakarību sauksim par *nehomogēnu*.

- *lineāru*, ja tai ir galīga kārta un funkcija f ir lineāra.

1.2. Klasisko kombinatorisko skaitļu rekurentās sakarības

1.2.1. Variācijas

- $\boxed{\overline{A}_n^m = \overline{A}_n^{m-1} \cdot n}$ - $\forall$ virknei ar atkārtojumiem ar garumu $m-1$ galā var pielikt jebkuru no n elementiem. Šo spriedumu var modelēt ar divdaļīgu grafu.

- $\boxed{A_n^m = A_n^{m-1} \cdot (n-m+1)}$ - $\forall$ virknei bez atkārtojumiem ar garumu $m-1$ galā var pielikt jebkuru no atlikušajiem $n-(m-1) = n-m+1$ elementiem.

- $\boxed{A_n^m = A_{n-1}^{m-1} \cdot m}$ - $\forall$ virknei bez atkārtojumiem no kopas ar $n-1$ elementiem ar garumu $m-1$ vienu jaunu n-tā tipa elementu var ielikt jebkurā no m vietām.

1.2.2. Kombinācijas

$\boxed{C_n^m = C_n^{m-1} \cdot \frac{(n-m+1)}{m}}$ - $\forall$ apakškopai ar $m-1$ elementiem var pievienot jebkuru no atlikušajiem $n-(m-1) = n-m+1$ elementiem. Savukārt katra apakškopa ar m elementiem var rasties no m mazākām apakškopām. Šo spriedumu var modelēt ar divdaļīgu grafu.

1.2.3. Stirlinga skaitļi

- $\boxed{S(n,m) = S(n-1,m-1) + mS(n-1,m)}$ - vienu jaunu elementu var vai nu
  - likt atsevišķā apakškopā (šādu sadalījumu skaits ir vienāds ar $S(n-1,m-1)$),
  - vai arī pievienot kādai no jau esošajām apakškopām (šādu sadalījumu skaits ir vienāds ar $mS(n-1,m)$).

- $\boxed{c(n,m) = c(n-1,m-1) + (n-1)c(n-1,m)}$ - vienu jaunu elementu var vai nu
  - likt atsevišķā ciklā (šādu permutāciju skaits ir vienāds ar $c(n-1,m-1)$),
  - vai arī pievienot kādai no jau esošajām permutācijām (šādu permutāciju skaits ir vienāds ar $(n-1)c(n-1,m)$).

1.2.4. Bella skaitļi

Atradīsim rekurentu sakarību Bella skaitļiem - kopu visu sadalījumu skaitu netukšās apakškopās.

Izteiksim B_{n+1} rekurentā veidā. Pieņemsim, ka

$$X_{n+1} = \{1, ..., n+1\},$$

- apskatīsim apakškopu, kas satur elementu $n+1$, pieņemsim, ka tā satur vēl k elementus, kur $0 \leq k \leq n$,
- šos k elementus var izvēlēties C_n^k veidos un atlikušos $n-k$ elementus var sadalīt apakškopās B_{n-k} veidos,

- kopējais sadalījumu skaits, ja tā apakškopa, kas satur elementu $n+1$, satur vēl k elementus, ir $C_n^k B_{n-k}$,
- summējot variantus, kas atbilst dažādām k vērtībām, iegūstam rekurentu sakarību

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_{n-k}.$$

1.3. Lineārās rekurentās sakarības

1.3.1. Pamatfakti

Relatīvi viegli analizējams un risināms ir rekurento sakarību speciālgadījums, kad rekurentās sakarības labā puse ir lineāra funkcija ar fiksētu argumentu skaitu.

Ja katram $n > k + n_0$ ir spēkā sakarība

$$a_n = u_1 a_{n-1} + u_2 a_{n-2} + ... + u_k a_{n-k} + f_n,$$

tad teiksim, ka virkne $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ apmierina *lineāru rekurentu sakarību (LRS) ar kārtu k.*

1.3.2. Lineāru rekurentu sakarību risināšana ar veidotājfunkciju metodi

Dots, ka virkne (piemēram, kāda kombinatorikas uzdevuma skaitošā virkne) $\{a_n\}_{n\geq 0}$ apmierina

- rekurentu sakarību $a_n = u_1 a_{n-1} + u_2 a_{n-2} + ... + u_k a_{n-k} + f_n,\ \forall\ n \geq k$,
- sākuma nosacījumus: a_0,..., a_{k-1} ir doti.

Metodes apraksts

Tad $\{a_n\}$ var mēģināt atrast izmantojot veidotājfunkcijas:

1. Sastādīsim veidotājfunkciju $A(x) = \sum\limits_{i\geq 0} a_i x^i$.

Apzīmēsim $A_m(x) = \sum\limits_{i=0}^{m-1} a_i x^i$.

2. Pārveidosim rekurento sakarību par veidotāfunkcijas vienādojumu. Reizināsim rekurento sakarību ar x^n un summēsim pa n no k līdz $+\infty$:

$$a_n x^n = u_1 a_{n-1} x^n + u_2 a_{n-2} x^n + \ldots + u_k a_{n-k} x^n + f_n x^n$$

$$\sum_{n \geq k} a_n x^n = \sum_{n \geq k} u_1 a_{n-1} x^n + \sum_{n \geq k} u_2 a_{n-2} x^n + \ldots$$

$$+ \sum_{n \geq k} u_k a_{n-k} x^n + \underbrace{\sum_{n \geq k} f_n x^n}_{=f(x)} \Longrightarrow$$

$$A(x) - A_k(x) = u_1 x \sum_{n \geq k} a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + u_k x^k \sum_{n \geq k} a_{n-k} x^{n-k} + f(x) \Longrightarrow$$

$$A(x) - A_k(x) = u_1 x (A(x) - A_{k-1}(x)) + \ldots + u_k x^k A(x) + f(x) \Longrightarrow$$

$$A(x)(1-\sum_{i=1}^{k} u_i x^i) = A_k(x) - \sum_{i=1}^{k-1} u_i x^i A_{k-i}(x) + f(x) \implies$$

3. Atradīsim $A(x)$. $A(x)$ var mēģināt atrast kā elementāru funkciju, pēc tam atrast koeficientus izmantojot Teilora rindu teoriju.

1.1. piemērs. $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.

1.3.3. Lineāru homogēnu rekurentu sakarību risināšana ar raksturīgā vienādojuma metodi

Virkņu kopā ir definētas divas operācijas - lineāras telpas struktūra:

- reizināšana ar skaitli - ja $x = \{x_n\}_{n \geq n_0}$, tad

$$\lambda \cdot x = \{\lambda x_n\}_{n \geq n_0},$$

- saskaitīšana - ja $x = \{x_n\}_{n \geq n_0}$ un $y = \{y_n\}_{n \geq n_0}$, tad

$$x + y = \{x_n + y_n\}_{n \geq n_0}.$$

1.1. teorēma. LHRS atrisinājumi veido lineāru telpu virs koeficientu lauka $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$.

PIERĀDĪJUMS Mums ir jāpierāda, ka

1. virkne x apmierina LHRS $\Longrightarrow$ $\forall\ \lambda$ virkne λx arī apmierina to pašu LHRS,
2. virknes x un y apmierina LHRS $\Longrightarrow$ virkne $\alpha x + \beta y$ arī apmierina to pašu LHRS.

1. Virkne $x = \{x_n\}_{n \geq n_0}$ apmierina LHRS

$$a_n = u_1 a_{n-1} + u_2 a_{n-2} + ... + u_k a_{n-k} \Longrightarrow$$

$\lambda x_n = \lambda(u_1 x_{n-1} + u_2 x_{n-2} + ... + u_k x_{n-k}) = u_1(\lambda x_{n-1}) + u_2(\lambda x_{n-2}) + ... + u_k(\lambda x_{n-k})$.

2. Virknes $x = \{x_n\}_{n \geq n_0}$ un $y = \{y_n\}_{n \geq n_0}$ apmierina LHRS $\Longrightarrow$

$$x_n + y_n = \sum_{i=1}^{k} u_i x_{n-i} + \sum_{i=1}^{k} u_i y_{n-i} = \sum_{i=1}^{k} u_i (x_{n-i} + y_{n-i}). \blacksquare$$

1.1. piezīme. Šī teorēma nozīmē to, ka, lai atrisinātu homogēnu lineāru rekurentu sakarību, ir

1. jāatrod atrisinājumu telpas bāze - jāatrod daži lineāri neatkarīgi "partikulāri" atrisinājumi $\varphi_{i,n}$(indekss i apzīmē atrisinājumu un indekss n ir virknes indekss);
2. jāatrod atrisinājums, kas apmierina LHRS sākuma nosacījumu, formā
$$c_1\varphi_{1,n} + c_2\varphi_{2,n} + ..,$$
kur koeficienti c_i tiek noteikti, izmantojot sākuma nosacījumus (dažu pirmo virknes locekļu vērtības);
3. jāatrod atrisinājumu telpas dimensija - parasti, tas ir sākuma nosacījumu skaits.

1.3.4. LHRS atrisinājumu telpas bāze

Pirmajā tuvinājumā LHRS bāzes atrisinājumus meklēsim formā
$$x_n = \lambda^n,$$

attiecībā uz λ iegūsim vienādojumu

$$\lambda^n = u_1\lambda^{n-1} + u_2\lambda^{n-2} + ... + u_k\lambda^{n-k}$$

vai

$$\lambda^k = u_1\lambda^{k-1} + u_2\lambda^{k-2} + ... + u_k, \tag{1}$$

kuru sauksim par LHRS *raksturīgo vienādojumu*.

Atrisinot raksturīgo vienādojumu, iegūsim visas iespējamās λ vērtības, ar kurām virkne $x_n = \lambda^n$ var būt atrisinājums.

Pēc tam, kad raksturīgā vienādojuma saknes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l$ ir atrastas, meklēsim atrisinājumu formā

$$a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + ... + c_l\lambda_l^n$$

vai kaut kā līdzīgi un atradīsim koeficientu c_i vērtības tā, lai apmierinātu rindas dažu pirmo locekļu vērtības.

Gadījums $k = 2$

Raksturīgais vienādojums ir

$$\lambda^2 = u_1\lambda + u_2,$$

kura saknēm ir iespējami divi gadījumi:

1) eksistē divas dažādas saknes λ_1, λ_2, partikulārie atrisinājumi λ_1^n un λ_2^n ir lineāri neatkarīgi (to var pārbaudīt), meklējam vispārīgo atrisinājumu formā

$$a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n,$$

ja saknes ir kompleksas, tad ir lietderīgi pārveidot vispārīgo atrisinājumu, izmantojot Eilera formulas;

2) viena divkārša sakne λ, kas dod tikai vienu atrisinājumu formā λ^n, ir jāatrod vēl viens lineāri neatkarīgs partikulārs atrisinājums. Eksistē 2 lineāri neatkarīgi partikulāri atrisinājumi λ^n un $n\lambda^n$, meklējam vispārīgo atrisinājumu formā

$$a_n = c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^n = \lambda^n(c_1 + c_2 n).$$

Vispārīgais gadījums

1.2. teorēma. Katrai raksturīga vienādojuma saknei λ ar kārtu k atbilst lineāri neatkarīgi atrisinājumi

$$\lambda^n, n\lambda^n, ..., n^{k-1}\lambda^n.$$

Visi šādi atrisinājumi veido LHRS atrisinājumu telpas bāzi.

PIERĀDĪJUMS Tieša pārbaude. Patstāvīgs darbs.

1.3.5. Klasiski uzdevumi

1.2. piemērs. Uzdevums par bitēm. *Fibonači virkne* tiek definēta ar šādiem nosacījumiem:

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ ja\ n > 1.$$

Raksturīgais vienādojums ir $\lambda^2 = \lambda + 1$, tā saknes ir $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Meklēsim vispārīgo atrisinājumu formā

$$a_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

$n = 0 \implies 1 = c_1 + c_2$

$n = 1 \implies 1 = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \implies$

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ c_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

1.3. piemērs. Cik ir dažādu n elementus garu vārdu alfabētā $\{0, 1, 2\}$ tādu, ka jebkuri divi kaimiņu simboli atšķiras par 0 vai 1?

Apzīmēsim

- ar A_n to vārdu kopu, kas beidzas ar 1,
- ar B_n- vārdu kopu, kas beidzas ar 0 vai 2.

Apzīmēsim $|A_n| = a_n$ un $|B_n| = b_n$. Jāatrod $c_n = a_n + b_n$ ar pareiziem sākuma nosacījumiem.

Domāsim par to, kā no vārdiem ar garumu $n-1$ var iegūt vārdus ar garumu n, pievienojot vienu simbolu beigās.

Teiksim, ka vārds w rada vārdu w', ja vārdu w' var iegūt no vārda w, pievienojot tam beigās vienu simbolu. Ir spēkā šādas sakarības:

- $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ (katrs vārds no A_{n-1} rada vienu jaunu vārdu no A_n un katrs vārds no B_{n-1} rada vienu jaunu vārdu no A_n);
- $b_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}$ (katrs vārds no A_{n-1} rada divus jaunus vārdus no B_n un katrs vārds no B_{n-1} rada vienu jaunu vārdu no B_n).

$$\Longrightarrow \begin{cases} b_n = 2a_{n-1} + a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + a_n \\ a_{n+1} = a_n + b_n \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = a_{n-1} + a_n \\ a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} \end{cases}$$

Lai atrisinātu uzdevumu līdz galam, ir jāatrod virkne $\{a_n\}$, kas apmierina sākuma nosacījumus $a_1 = 1, a_2 = 3$, jāatrod b_n pēc formulas $b_n = a_{n+1} - b_n$ un jāatrod $c_n = a_n + b_n$.

Cits ceļš - katru sistēmas rekurento sakarību pārveidot par vienādojumu attiecībā uz veidotājfunkcijām, atrast veidotājfunkcijas.

2. 4.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

4.1 X_n ir tādu apakškopu skaits kopā $\{1, ..., n\}$, kurās nav divu elementu ar pēctecīgiem numuriem. Atrast rekurentu sakarību virknes $\{X_n\}_{n>0}$ locekļiem.

4.2 Pierādīt, ka otrā veida Stirlinga skaitļi apmierina rekurentu sakarību

$$S(n, m) = \sum_{k=0}^{n-m} S(n-k-1, m-1) C_{n-1}^{k}.$$

4.3 Plaknē dotas n riņķa līnijas. Nekādas 3 riņķa līnijas nekrustojas vienā punktā, jebkuras 2 riņķa līnijas krustojas divos punktos. D_n ir plaknes apgabalu skaits, kuros šīs riņķa līnijas sadala plakni. Atrast D_n.

4.4 Atrast bināru virkņu skaitu ar garumu n, kas nesatur apakšvirkni 0101 ?

4.5 Atrisināt rekurentās sakarības.

(a) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.
(b) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.
(c) $a_n = u_1 a_{n-1} \cdot n^2 + u_2 a_{n-2} \cdot n$ (pietiek atrast vienādojumu veidotājfunkcijai).

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

4.6 Dots taisnstūra paralēlskaldnis ar izmēriem $2\times2\times n$, tas ir pilnīgi jāaizpilda ar klucīšiem, kuru izmēri ir $1 \times 1 \times 2$. Apzīmēsim ar a_n veidu skaitu, kā to var izdarīt (piemēram, $a_1 = 2$, $a_2 = 9$). Atrast a_n.

4.7 Par kopas $\{1, ..., n\}$ permutācijas $(a_1, ..., a_n)$ *kāpumu* vai *kritumu* sauksim indeksu i, tādu ka $a_i < a_{i+1}$ vai $a_i > a_{i+1}$. Par *Eilera skaitli* $E(n, k)$ sauksim kopas $\{1, ..., n\}$ permutāciju skaitu, kurās ir tieši k kāpumi. Pierādīt, ka Eilera skaitļiem izpildās šādas rekurentās sakarības:

(a) $E(n,k) = E(n, n-1-k)$;
(b) $E(n,k) = (k+1)E(n-1,k) + (n-k)E(n-1,k-1)$;
(c) $\sum_{k=0}^{n-1} E(n,k) = n!$;
(d) $E(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_{n+1}^i (k+1-i)^n$.