*DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE*
*Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte*
*Matemātikas katedra*
*Maģistra studiju programma "Matemātika"*

*Studiju kurss*

# Diskrētā matemātika

## 3.lekcija

*Docētājs: Dr. P. Daugulis*

*2012./2013.studiju gads*

# Saturs

**Lekcijas mērķis:**

- apgūt kombinatorikas uzdevumus, kurus nevar reducēt uz virkņu vai apakškopu skaitīšanu,
- apgūt ieslēgšanas-izslēgšanas metodi.

**Lekcijas kopsavilkums:**

- var definēt vairākus vienkāršus kombinatorikas uzdevumus, kurus nevar reducēt uz virkņu vai apakškopu skaitīšanu,
- vairāku kopu apvienojuma elementu skaitu var atrast ar kombinatorisku tuvinājumu metodi.

**Svarīgākie jēdzieni:** otrā veida Stirlinga skaitļi, Bella skaitļi, otrā veida Stirlinga skaitļi, sadalījuma skaitļi, Janga diagramma, vienādojumu atrisinājumu skaits veselos, ieslēgšanas-izslēgšanas metode.

**Svarīgākie fakti un metodes:** formulas un citas sakarības definētajiem kombinatoriskajiem skaitļiem, ieslēgšanas-izslēgšanas formula, Būla nevienādība, Bonferroni nevienādība, sirjektīvo funkciju skaita formula.

# 1. Uzdevumi, kas nav reducējami uz kombinācijām vai variācijām

## 1.1. Kopu sadalījumu skaits - otrā veida Stirlinga skaitļi un Bella skaitļi

**Otrā veida Stirlinga skaitļi**

Ar $\left\{{n \atop m}\right\}$ vai $S(n,m)$ apzīmēsim $n$ elementus lielas kopas dažādu sadalījumu skaitu $m$ netukšās apakškopās. Definēsim arī

$$S(n,0) = \begin{cases} 1, & \text{ja } n = 0, \\ 0, & \text{ja } n > 0. \end{cases}$$

Tos sauc par *Stirlinga apakškopu skaitļiem* vai *otrā veida Stirlinga skaitļiem*.

Skaitļu $S(n,m)$ aprēķināšanai nav zināma nekāda formula elementāras funkcijas vai vienkārša reizinājuma veidā. Vienkāršākā zināmā formula:

$$S(n, m) = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i (m-i)^n.$$

**1.1. piemērs.** $S(n, 1) = S(n, n) = 1$. $S(3, 2) = 3$. $S(4, 2) = 7$. $S(4, 3) = 6$.

Var redzēt, ka otrā veida Stirlinga skaitļi apmierina identitātes

$$S(n, 2) = 2^{n-1} - 1,$$
$$S(n, n-1) = C_n^2.$$

## Bella skaitļi

Visu $n$ elementu lielas kopas sadalījumu skaitu netukšās apakškopās sauksim par *$n$-to Bella skaitli* un apzīmēsim ar $B_n$. Var redzēt, ka saskaņā ar summas likumu

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} S(n, i).$$

Definējam arī $B_0 = 1$.

**1.2. piemērs.** $B_0 = 1$. $B_1 = 1$. $B_2 = 2$. $B_3 = 5$. $B_4 = 15$.

Nav zināmas vienkāršas galīgas formulas. Labākie rezultāti:

- rekurenta sakarība:

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i} B_i;$$

- izteiksme elementārās funkcijas veidā eksponenciālajai veidotājfunkcijai $\mathcal{B}(x) = \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{B_n}{n!} x^n$:

$$\mathcal{B}(x) = e^{e^x - 1}.$$

**1.1. piezīme.** Bella skaitļus var interpretēt izmantojot dažādu objektu ievietošanu identiskās kastēs.

## 1.2. Kopu ciklisko sadalījumu skaits - pirmā veida Stirlinga skaitļi

Ar $c(n,m)$ vai $\left[ n \atop m \right]$ apzīmēsim $n$ elementus lielas kopas tādu permutāciju skaitu,kurās ir tieši $m$ cikli. Definēsim arī $c(0,0)=1$.

Tos sauksim par *pirmā veida absolūtajiem (unsigned) Stirlinga skaitļiem.*

Skaitļus $c(n,m)\cdot(-1)^{n-m}$ sauksim par *maiņzīmju pirmā veida Stirlinga skaitļiem*, apzīmēsim ar $s(n,m)$.

Skaitļu $c(n,m)$ aprēķināšanai nav zināma nekāda formula elementāras funkcijas vai vienkārša reizinājuma veidā. Labākais rezultāts - rekurenta sakarība

$$c(n+1,m)=n\cdot c(n,m)+c(n,m-1).$$

PIERĀDĪJUMS. Pievienosim $n$ elementu kopai vēl vienu elementu $a$:

- $c(n, m-1)$ - tik daudz ir permutāciju ar $m$ cikliem, kas fiksē $a$,
- katrai $n$ elementu kopas permutācijai ar $m$ cikliem $a$ var pievienot kā nākamo elementu $n$ veidos (pēc jebkura cita elementa) $\Longrightarrow$ to permutāciju skaits, kas nefiksē $a$, ir $n \cdot c(n, m)$.

**1.3. piemērs.** $c(n, n) = 1$. $c(n, 1) = (n-1)!$. $c(4, 2) = 11$. Var redzēt, ka pirmā veida absolūtie Stirlinga skaitļi apmierina identitātes

$$c(n, n-1) = C_n^2,$$

$$c(n, n-2) = 2C_n^3 + \frac{1}{2}C_n^2 C_{n-2}^2 = \frac{1}{4}(3n-1)C_n^3.$$

## 1.3. Naturālo skaitļu sadalījumu skaits

Naturāla skaitļa $n$ izteikšanu nesakārtotā naturālu skaitļu summā sauksim par $n$ *sadalījumu*, apzīmēsim sadalījumu skaitu ar $p(n)$ ($n$*-tais sadalījuma skaitlis*).

Tā kā sadalījuma elementus var viennozīmīgi sakārtot augošā vai dilstošā kārtībā, tad parasti skaitļa $n$ sadalījumu uzdod kā monotonu, piemēram, nedilstošu, naturālu skaitļu virkni $n_1 \geq n_2 \geq ...n_k$, kas apmierina nosacījumu

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

Definēsim arī

- $q_m(n)$ - $n$ sadalījumu skaits, kuros katrs saskaitāmais $\leq m$,
- $p_m(n)$ - $n$ sadalījumu skaitu, kuros ir ne vairāk kā $m$ saskaitāmie.

**1.4. piemērs.** $p(1) = 1$. $p(2) = 2$. $p(3) = 3$. $p(4) = 5$. $p(5) = 7$. $p(6) = 11$.

Nav zināmas vienkāršas galīgas formulas (2011.g ir anonsēti jauni rezultāti par galīgām formulām). Labākie rezultāti:

- rekurenta sakarība:

$$p(n) = 1 + \sum_{i=1}^{[n/2]} q_i(n-i);$$

- sakarība veidotājfunkcijai $P(x) = \sum_{n \geq 0} p(n) x^n$:

$$P(x) = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x^i}.$$

Sadalījumu var definēt arī kā vienādojuma

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + m x_m = n$$

atrisinājumu nenegatīvos skaitļos, šajā gadījumā $x_i$ nozīmē skaitļa $i$ multiplicitāti jeb kārtu sadalījumā.

Sadalījumus var arī vizualizēt, izmantojot *Janga diagrammas*: ja ir dots sadalījums $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, kur $n_i \geq n_j$, ja $i > j$, tad šādu sadalījumu uzdosim kā kreisajā malā nolīdzinātu tabulu ar mainīga garuma rindām, kur $i$-tā rindas satur $n_i$ rūtiņas.

Katram sadalījumam var konstruēt *duālo sadalījumu*, kas atbilst transponētajai (simetriskajai attiecībā pret diagonāli, kas iziet no augšējā kreisā stūra) Janga diagrammai.

Tā kā transponēšana ir bijektīva operācija, tad saskaņā ar vienlieluma likumu varam iegūt šādu rezultātu: $q_m(n) = p_m(n)$.

**1.2. piezīme.** Naturālu skaitļu sadalījumu var interpretēt kā identisku objektu ievietošanu identiskās kastēs.

**1.3. piezīme.** $p_n(m)$ var interpretēt kā vienādojuma

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = m$$

*augošu atrisinājumu skaits* - meklēsim atrisinājumus ar īpašību $0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n$. Katram šādam atrisinājumam atbilst skaitļa $m$ sadalīšana ne vairāk kā $n$ pozitīvu saskaitāmo summā, tātad kopējais variantu skaits ir vienāds ar $p_n(m)$.

# 2. Ieslēgšanas-izslēgšanas formula (IIF, sieta likums)

Šo metodi pielieto, ja ir jāatrod elementu skaits vairāku tādu kopu apvienojumā, kurām ir kopīgi elementi. Pareizā atbilde tiek atrasta ar tuvināšanas palīdzību.

Ieslēgšanas-izslēgšanas formula ir summas likuma vispārinājums. Atgādināsim, ka summas likums saka, ka

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|,$$

ja $A_i \cap A_j = \varnothing$ dažādiem indeksiem.

Šajā metodē tiek vispārināta skaitīšanas ideju, atļaujot skaitīt elementus arī ar negatīvu zīmi: ja ir dotas divas galīgas kopas $A$ un $B$, tad starpību $|A| - |B|$ var interpretēt kā tādas skaitīšanas rezultātu, kurā katrs kopas $A$ elements tiek skaitīts parastajā nozīmē (ar $+$ zīmi), bet katrs kopas $B$ elements tiek skaitīts negatīvā nozīmē (ar $-$ zīmi).

## 2.1. Speciālgadījumi

### 2.1.1. Divas kopas

Atradīsim elementu skaitu divu kopu $A_1$ un $A_2$ apvienojumā, ja ir zināms elementu skaits katrā no kopām un to šķēlumā.

Pirmajā tuvinājumā varam apskatīt summu

$$|A_1| + |A_2|.$$

Redzam, ka elementi, kas atrodas kopā $A_1 \cap A_2$, tiek skaitīti divas reizes jeb ar svaru 2, tāpēc ir jāveic korekcija. Viegli redzēt, ka

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Loceklis $-|A_1 \cap A_2|$ formulas labajā pusē ir tāpēc, lai kompensētu summā $|A_1| + |A_2|$ divas reizes skaitītos šķēluma elementus.

### 2.1.2. Trīs kopas

Atradīsim elementu skaitu trīs kopu $A_1$, $A_2$ un $A_3$ apvienojumā, ja ir zināms elementu skaits katrā no kopām un visos to šķēlumos.

Pirmajā tuvinājumā šo skaitu varētu pieņemt vienādu ar

$$|A_1| + |A_2| + |A_3|,$$

bet tad elementi jebkuru divu kopu šķēlumos tiks skaitīti divas vai trīs reizes, tāpēc nākošajā tuvinājumā uzskatīsim, ka elementu skaits trīs kopu apvienojumā ir vienāds ar

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|.$$

Savukārt tagad ir problēmas ar elementiem visu trīs kopu šķēlumā, jo katrs no tiem vispār netiek skaitīts - tiek skaitīts ar svaru 0. Var redzēt, ka

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$
$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| +$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Summu

$$-|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

var interpretēt kā kompensējošo labojumu, lai panāktu to, ka katrs elements labajā pusē tiek algebriski (ņemot vērā skaitīšanas zīmi) skaitīts tieši vienu reizi.

## 2.2. Vispārīgais gadījums

Dota galīga indeksu kopa $U = \{1, ..., n\}$ un galīga kopa $A_i$, $\forall\ i$. Katrai kopai $I \subseteq U$ definēsim $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$.

**2.1. teorēma.** (Ieslēgšanas-izslēgšanas formula)

$$\left| \bigcup_{i \in U} A_i \right| = \sum_{\varnothing \neq I \subseteq U} (-1)^{|I|+1} |A_I|,$$

citos apzīmējumos -

$$\left|A_1 \cup \ldots \cup A_n\right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} \left|A_i \cap A_j\right| +$$

$$+ \sum_{i<j<k} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \ldots + (-1)^{n+1}\left|A_1 \cap \ldots \cap A_n\right|.$$

PIERĀDĪJUMS Saskaitāmo $\pm|X|$ domāsim kā kopas $X$ elementu skaitīšanu ar atbilstošo zīmi.

Pierādīsim, ka katrs elements, kas pieder vismaz vienai kopai $A_i$, labajā pusē tiek skaitīts tieši vienu reizi, tas nozīmēs, ka ir spēkā pierādāmā vienādība.

Pieņemsim, ka elements $a$ pieder tieši $k$ kopām $A_i, 1 \leq k \leq n$. Tas nozīmē, ka

- $a$ pieder $C_k^2$ divu kopu $A_i$ šķēlumiem,
- $a$ pieder $C_k^3$ trīs kopu $A_i$ šķēlumiem,

... ...,

- $a$ pieder $C_k^m$ $m$ kopu šķēlumiem,

... ...,

- $a$ pieder vienam $(1 = C_k^k)$ $k$ kopu šķēlumam.

Cik reizes šis elements $a$ tiek skaitīts formulas labajā pusē?

- Pirmajā summā tas tiek skaitīts $k = C_k^1$ reizes,
- otrajā summā tas tiek skaitīts $C_k^2$ reizes ar $-$ zīmi (vienu reizi katrā no $A_i \cap A_j$ tipa šķēlumiem),

  ...,

- $m$-tajā summā tas tiek skaitīts $C_k^m$ reizes ar zīmi $(-1)^{m-1}$ (vienu reizi katrā no šķēlumiem, kuram tas pieder),

...

Tātad kopā elements tiek skaitīts

$$C_k^1 - C_k^2 + C_k^3 - ... = 1 - (1 - C_k^1 + C_k^2 - ...) = 1 - (1-1)^k = 1$$

reizes.

Redzam, ka katrs elements pierādāmās formulas labajā pusē tiek skaitīts tieši vienu reizi un teorēma ir pierādīta. ■

## 2.3. Nevienādības

IIF labās puses dažus pirmos locekļus var izmantot kreisās puses novērtēšanai no vienas vai otras puses.

**Būla nevienādība**

Var redzēt, ka

$$\left|A_1 \cup \ldots \cup A_n\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |A_i|,$$

tāpēc ka nevienādības labās puses summā apvienojuma elementi, kas pieder vairāk kā vienai kopai, tiek skaitīti vairāk kā vienu reizi.

## Bonferroni nevienādība

Otrs piemērs -

$$\left|A_1 \cup \ldots \cup A_n\right| \geq \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} \left|A_i \cap A_j\right|,$$

šī nevienādība ir spēkā, tāpēc ka labajā pusē apvienojuma elementi, kas pieder tieši vienai vai tieši divām kopām, tiek skaitīti pareizi, bet elementi, kas pieder vairāk kā divām kopām, tiek skaitīti ar nepozitīvu svaru.

**2.1. piemērs.** Kādam cilvēkam ir mētelis ar kopējo laukumu 1 un pieciem ielāpiem. Katra ielāpa laukums ir 1/2. Pierādīt, ka vismaz diviem ielāpiem kopīgais laukums pārsniedz 3/20.

# 2.4. Klasiski kombinatorikas uzdevumi, kurus var atrisināt ar IIF

## 2.4.1. IIF un atņemšanas metode

Izmantojot IIF var skaitīt elementus dotajā kopā $\mathcal{A}$, ja $\mathcal{A}$ tiek raksturota kā vairāku kopu šķēlums: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \bigcap \mathcal{A}_2 \bigcap ... \bigcap \mathcal{A}_n$:

$$|\mathcal{A}| = |U| - |\overline{\mathcal{A}}| = |U| - \left|\overline{\mathcal{A}_1 \bigcap \mathcal{A}_2 \bigcap ... \bigcap \mathcal{A}_n}\right| = |U| - \underbrace{\left|\overline{\mathcal{A}_1} \bigcup \overline{\mathcal{A}_2} \bigcup ... \bigcup \overline{\mathcal{A}_n}\right|}_{IIF}$$

## 2.4.2. Sirjektīvo funkciju skaits

Cik ir sirjektīvu funkciju no $n$ elementus lielas kopas $A = \{1, ..., n\}$ uz $m$ elementus lielu kopu $B = \{1, ..., m\}$?

Visu funkciju skaits no $A$ uz $B$ ir vienāds ar $\overline{A}_m^n = m^n$.

Skaitīsim, cik ir nesirjektīvu funkciju. Apzīmēsim ar $F_i$ to funkciju kopu, kuru attēls nesatur elementu $i \in B$ un ar $F_I$ - to funkciju kopu, kuru attēls nesatur nevienu indeksu $i \in I \subseteq B$.

Var redzēt, ka
$$F_I = \bigcap_{i \in I} F_i.$$
Atradīsim elementu skaitu kopā $F_I$. Funkcijas no šīs kopas ir visas funkcijas no $A$ uz $B \backslash I$, kuru skaits ir vienāds ar
$$\overline{A}^n_{m-|I|} = (m - |I|)^n.$$
Visu nesirjektīvo funkciju kopa ir vienāda ar $\bigcup\limits_{i \in B} F_i$, tāpēc ka katrai nesirjektīvai funkcijai attēlā trūkst vismaz viens kopas $B$ elements.

Saskaņā ar ieslēgšanas-izslēgšanas principu iegūstam, ka
$$|\bigcup_{i \in B} F_i| = \sum_{\varnothing \neq I \subseteq B} (-1)^{|I|+1} |F_I| = \sum_{\varnothing \neq I \subseteq B} (-1)^{|I|+1} (m - |I|)^n.$$
Katram naturālam skaitlim $i$, $0 \leq i \leq m$ to apakškopu $I$ skaits, kas apmierina nosacījumu $|I| = i$, ir vienāds ar $C^i_m$. Ņemot vērā šo faktu,

mēs varam summā pārgrupēt saskaitāmos un pāriet uz summēšanas indeksu $i$:

$$|\bigcup_{i\in B} F_i| = \sum_{0<i\leq m} (-1)^{i+1} C_m^i (m-i)^n.$$

Ja visu funkciju skaits ir vienāds ar $m^n$ un nesirjektīvo funkciju skaits tagad ir atrasts, tad sirjektīvo funkciju skaits ir vienāds ar

$$m^n - \sum_{0<i\leq m} (-1)^{i+1} C_m^i (m-i)^n = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i (m-i)^n.$$

Izdarot summēšanas indeksa substitūciju $i \to m-i$, iegūsim, ka sirjektīvu funkciju skaits ir vienāds arī ar

$$\sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i i^n.$$

**2.1. piezīme.** Katrai sirjektīvai funkcijai no $n$-kopas uz $m$-kopu var piekārtot $n$-kopas netukšu apakškopu sadalījuma virkni ar garumu $m$. Katrai šādai virknei atbilst $n$-kopas sadalījums. Katram sadalījumam atbilst $m!$ virknes. Tādējādi saskaņā ar dalīšanas likumu

$$S(n,m) = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_m^i (m-i)^n.$$

# 3. 3.mājasdarbs

## 3.1. Obligātie uzdevumi

3.1 Pierādiet, ka

(a) otrā veida Stirlinga skaitļi $S(n,m)$ apmierina sakarību

$$S(n,3) = \frac{1}{2}(3^{n-1}+1) - 2^{n-1}.$$

(b) pirmā veida absolūtie Stirlinga skaitļi $c(n,m)$ apmierina sakarību

$$c(n,n-3) = \frac{1}{48}n^2(n-1)^2(n-2)(n-3) = C_n^2 C_n^4.$$

3.2 Izmantojot skaitīšanu divos dažādos veidos, pierādiet sakarības

(a) $C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m}$,

(b) $C_n^m = \dfrac{n}{m} C_{n-1}^{m-1}$,

(c) $B_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i B_i$.

3.3 Cik veidos var izvietot virknē 2 identiskus sarkanus akmeņus, 3 identiskus zilus akmeņus un 4 identiskus zaļus akmeņus tā, lai nevienas krāsas akmeņi nav izvietoti nepārtraukti?

3.4 Cik ir nenegatīvu veselu atrisinājumu vienādojumam

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20,$$

kuriem izpildās nosacījums $x_i \leq 11$?

3.5 Cik ir veselu skaitļu intervālā $[1, 10^6]$, kas nedalās ne ar vienu no skaitļiem 8, 9, 10.

## 3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

3.6 Pierādīt, ka

(a) $c(n, 2) = (n-1)! H_{n-1}$, kur $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$,

(b) $c(n, n-4) = \frac{5}{16} C_n^5 (x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{15})$.

3.7 Ar IIF palīdzību pierādīt formulas

(a) $C_n^m = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} C_{n-i}^{m-i} C_n^i$;

(b) $\sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_n^i C_{n-i}^{m-i} = 0$;

(c) $C_n^m = \sum_{i=m+1}^{n+1} (-1)^{i-m-1} C_{n+1}^i$.