DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

12.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt neatkarīguma un krāsošanas pamatfaktus,

- apgūt planāru grafu pamatīpašības.

Lekcijas kopsavilkums:

- var pētīt grafu virsotņu un šķautņu neatkarīguma un "segšanas" īpašības,
- var pētīt grafus, kurus var attēlot plaknē bez šķautņu krustošanās ārpus virsotnēm - planārus grafus.

Svarīgākie jēdzieni: neatkarīga šķautņu un virsotņu kopa, virsotņu un šķautņu neatkarīguma un seguma skaitļi, dominējoša virsotņu kopa, dominēšanas skaitlis, virsotņu un šķautņu krāsojums, virsotņu un šķautņu hromatiskie skaitļi, plakans grafs, plakanizācija, planārs grafs, skaldne, maksimāls plakans grafs, triangulācija.

Svarīgākie fakti un metodes: dominēšanas skaitļa īpašības, plakanizācijas īpašības, planāru grafu īpašības, triangulācijas īpašība, Eilera formula un tās sekas, Kuratowski-Wagner kritērijs.

1. Neatkarīgums un krāsošana

1.1. Segumi, neatkarīgums

Virsotņu kopa ir neatkarīga, ja nekādas divas no tām nav savienotas. Elementu skaits maksimālā neatkarīgā virsotņu kopā - grafa *virsotņu neatkarības skaitlis* $\alpha_0(\Gamma)$.

Šķautņu kopa - neatkarīgu, ja nekādas divas no tām nav incidentas. Maksimāls elementu skaits neatkarīgā šķautņu kopā - grafa *šķautņu neatkarības skaitlis* $\alpha_1(\Gamma)$.

Teiksim, ka virsotne *sedz* tai incidentās šķautnes un šķautne sedz tai incidentās virsotnes.

Virsotņu kopu, kas sedz visas grafa šķautnes - grafa *virsotņu segums*. Minimālais elementu skaits virsotņu segumā - grafa *virsotņu seguma skaitlis* $\beta_0(\Gamma)$.

Šķautņu kopa, kas sedz visas grafa virsotnes - grafa *šķautņu segums*. Minimālais elementu skaits šķautņu segumā - grafa *šķautņu seguma skaitlis* $\beta_1(\Gamma)$.

Virsotņu kopa $S \subseteq V$ - *dominējoša*, ja

$$S \bigcup N(S) = V,$$

citiem vārdiem sakot, $\forall\ v \in V$ vai nu $v \in S$, vai arī $\exists$ virsotne $s \in S$ un šķautne $(v, s) \in E$.

Grafa Γ mazākās dominējošās kopas elementu skaitu sauksim par *dominēšanas skaitli* $dom(\Gamma)$.

1.1. teorēma. $\Gamma = (V, E)$, $S \subseteq V$ - neatkarīga kopa. S - maksimāla neatkarīga $\iff$ S - dominējoša kopa.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka S ir maksimāla neatkarīga.

Pieņemsim, ka S nav dominējoša $\implies$ $\exists\ v \in V$, kas atrodas attālumā lielākā kā 1 no visām kopas S virsotnēm. Šo virsotni var pievienot kopai S, saglabājot neatkarību - pretruna.

Pieņemsim, ka S ir neatkarīga dominējoša kopa, kas nav maksimāla neatkarīga $\Longrightarrow$ $\exists\, w \in V$, kas nav savienota ne ar vienu kopas S virsotni, tas ir, atrodas attālumā lielākā kā 1 no visām S virsotnēm. Tas ir pretrunā ar pieņēmumu, ka S ir dominējoša kopa. ■

1.1. piezīme. Pielietojumos svarīgs uzdevums ir atrast dominējošo kopu ar minimālo virsotņu skaitu dotajā grafā.

1.2. teorēma. $\Gamma = (V, E)$ - sakarīgs neorientēts grafs, $|V| \geq 2$.

1. $dom(\Gamma) \leq \left[\frac{|V|}{2}\right]$.
2. $dom(\Gamma) \geq \frac{|V|}{1 + \Delta(\Gamma)}$.

PIERĀDĪJUMS

1. T ir Γ pārklājošais koks $\Longrightarrow$ $dom(\Gamma) \leq dom(T)$ $\Longrightarrow$ pietiek pierādīt apgalvojumu kokiem.

Izmantosim indukciju ar parametru $|V|$.

Indukcijas bāze

Ja $|V| = 2$, tad apgalvojumu viegli pārbaudīt.

Indukcijas solis

Pieņemsim, ka apgalvojums ir pierādīts visiem kokiem, kuriem $|V| < m$ un pierādīsim, ka tad apgalvojums seko kokiem, kuriem $|V| = m$.

Kokā Γ $\exists$ lapa l $\Longrightarrow$ $\exists$ virsotne u, kas ir savienota ar l. Definēsim $\Gamma' = \Gamma - u$.

Γ' komponentes ir $T_0, l_1, ..., l_j, T_1, ..., T_r$, kur $T_0 = \{l\}$, l_i - triviāli grafi, T_i - netriviāli koki. Apzīmēsim $V(T_i) = n_i$. Seko, ka

$$\sum_{i=1}^{r} n_i \leq |V| - 2.$$

Saskaņā ar indukcijas hipotēzi, $dom(T_i) \leq \left[\frac{n_i}{2}\right]$ - kokam T_i $\exists$ dominējoša kopa D_i ar elementu skaitu $\leq \left[\frac{n_i}{2}\right]$.

Kopa $D = l \cup D_1 \cup ... \cup D_r$ ir dominējoša kopa kokam T un

$$|D| \leq 1 + \sum_{i=1}^{r} \left[\frac{n_i}{2}\right] \leq 1 + \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{n_i}{2}\right] \leq 1 + [\frac{|V| - 2}{2}] = \left[\frac{|V|}{2}\right].$$

(Tika izmantota īpašība $[a + b] \leq [a] + [b]$.)

2. $\forall$ virsotne var nosegt ne vairāk kā $\Delta(\Gamma)$ citas virsotnes $\Longrightarrow \forall$ virsotne dominējošā kopā apkalpo ne vairāk kā $1 + \Delta(\Gamma)$ virsotnes $dom(\Gamma) \cdot (1 + \Delta(\Gamma)) \geq |V|$. $\blacksquare$

1.2. Krāsošana

Grafa virsotņu kopu var mēģināt sadalīt apakškopu apvienojumā tā, lai katrā apakškopā virsotnes būtu neatkarīgas. Tradicionāli šādu procedūru sauc par grafu *krāsošanu*.

Par grafa *virsotņu krāsojumu (krāsojumu)* sauksim funkciju no grafa virsotņu kopas uz krāsu kopu, tādu, ka nekādām divām savienotām virsotnēm nav piekārtota viena krāsa.

Mazākais krāsu skaits, ar kuru dotajam grafam eksistē krāsojums - grafa *virsotņu hromatiskais skaitlis*, $\chi(\Gamma)$.

Viegli redzēt, $\chi(\Gamma) \geq \omega(\Gamma)$ (*kliķes skaitlis*, maksimālais r: Γ satur apakšgrafu K_r).

Γ - *k-krāsojams*, ja $k \geq \chi(\Gamma)$. Grafu sauksim par *k-hromatisku*, ja $k = \chi(\Gamma)$.

Līdzīgi var definēt grafa šķautņu krāsojumu un ar to saistītās īpašības. Par grafa *šķautņu krāsojumu* sauksim funkciju no grafa šķautņu kopas uz krāsu kopu, tādu, ka nekādām divām incidentām šķautnēm nav piekārtota viena krāsa.

Mazāko krāsu skaitu, ar kuru grafam Γ eksistē šķautņu krāsojums, sauc par grafa *šķautņu hromatisko skaitli*, $\chi_1(\Gamma)$.

1.1. piemērs. Augstskolā tiek organizētas vairākas nodarbības tā, lai katrs students var piedalīties vienā nodarbībā. Katram studentam obligāti ir jāpiedalās katrā viņam/viņai paredzētā nodarbībā. Katra nodarbība ilgst fiksētu laika intervālu. Kāds ir minimāli iespējamais laiks, kas ir nepieciešams, lai notiktu visas nodarbības, kas ir nepieciešamas studentiem?

2. Planaritāte

2.1. Definīcijas

Grafs $\Gamma = (V, E)$ ir *plakans, ja*

- $V \subseteq \mathbb{R}^2$ (virsotnes atrodas vienā plaknē);
- $\forall$ šķautne ir līkne, kas savieno divas virsotnes dotajā plaknē;
- $\forall$ šķautnes iekšējā daļa nekrustojas ne ar virsotnēm, ne ar citām šķautnēm.

Īsi sakot, grafs ir plakans, ja to var uzzīmēt plaknē tā, ka šķautnes nekur nekrustojas, izņemot virsotnes.

Grafs ir *planārs*, ja tas ir izomorfs plakanam grafam.

Planāra grafa pārveidošana par plakanu grafu - *plakanizācija*.

Par plakana grafa *skaldni* sauksim plaknes apgabalu, ko norobežo šķautnes un kurš nesatur virsotnes vai šķautnes (ieskaitot ārējo apgabalu).

2.1. teorēma. $\Gamma = (V, E)$ - neorientēts grafs. Γ var plakanizēt $\iff$ Γ var plakanizēt uz sfēras.

PIERĀDĪJUMS Stereogrāfiskā projekcija. ■

2.2. teorēma. $\Gamma = (V, E)$ - planārs grafs, $v \in V$, $e \in E$. Γ var plakanizēt tā, ka v vai e pieder ārējai skaldnei.

PIERĀDĪJUMS Diskusija. Jāizmanto stereogrāfiskā projekcija. ■

Skaldnes *robeža* ir maršruts, kura pirmā virsotne ir vienāda ar pēdējo virsotni (piemēram, vienkāršs cikls).

Var redzēt, ka katram plakanam grafam ir tieši viena neierobežota skaldne, kuru sauksim par *ārējo skaldni*, pārējās skaldnes sauksim par *iekšējām*.

Planāru grafu sauksim par *ārēji planāru*, ja to var uzzīmēt plaknē tā, ka visas tā virsotnes pieder vienai skaldnei.

Planāro grafu teorija tiek pielietota tādās inženierzinātnēs kā autoceļu projektēšana, mikroshēmu projektēšana u.c.

2.1. piezīme. *"Četru krāsu problēma".* 1970.gados izmantojot datorus, tika pierādīta šāda teorēma - grafs Γ ir planārs $\Longrightarrow$ $\chi(\Gamma) \leq 4$. Šīs teorēmas pierādījums tika iegūts, apskatot lielu skaitu grafu speciālgadījumu.

2.2. Planāru grafu īpašības

2.3. teorēma.

1. Katrs planāra grafa apakšgrafs ir planārs.
2. Ja šķautne e pieder ciklam (e ir tilts), tad e pieder tieši 2 skaldņu robežām.
3. Ja šķautne e nepieder ciklam (e nav tilts), tad e pieder tieši vienas skaldnes robežai.
4. Plakanam mežam ir viena skaldne.

5. Grafs ir planārs tad un tikai tad, ja katrs tā bloks ir planārs.

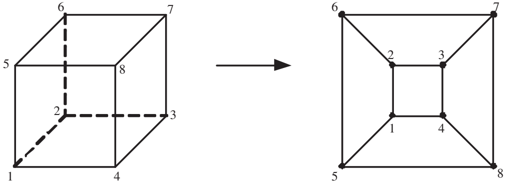
PIERĀDĪJUMS Diskusija. ■

2.1. piemērs. Pierādīsim, ka grafs K_5 nav planārs. Jebkurš tā inducētais apakšgrafs, kas satur četras virsotnes, ir planārs, tāpēc to var attēlot plaknē kā plakanu grafu. Pēdējā piektā virsotne var atrasties vai nu ārējā skaldnē, vai arī vienā no iekšējām skaldnēm. Šī virsotne ir jāsavieno ar katru no pārējām četrām virsotnēm, un katrā no šiem diviem gadījumiem eksistē viena virsotne, kuru nevar savienot ar piekto virsotni tā, lai nekrustotu pilnā grafa K_4 šķautnes.

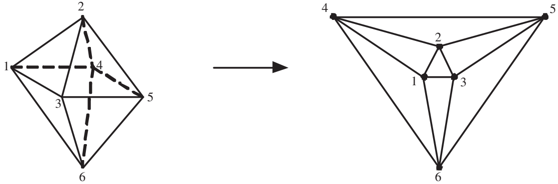
2.3. Maksimāli planāri grafi un triangulācija

Plakanu grafu sauksim par *maksimālu plakanu grafu*, ja pievienojot jebkuru jaunu šķautni, grafs vairs nav plakans. Maksimāls planārs grafs ir grafs, kas ir izomorfs maksimālam plakanam grafam.

Sakarīgu plakanu grafu sauksim par *triangulāciju*, ja katra skaldne,

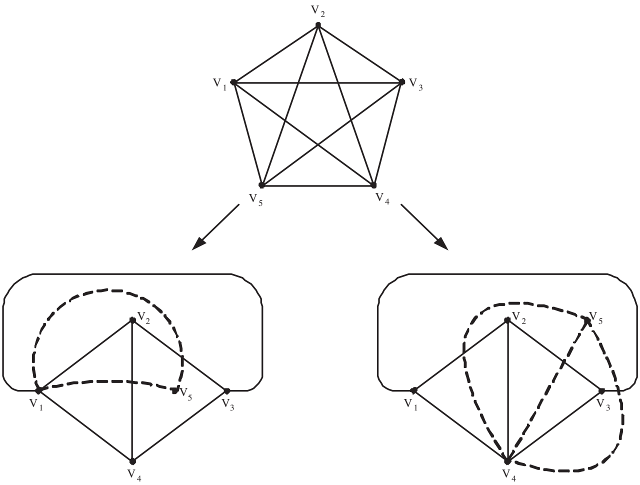


(a)



(b)

3.61. attēls. Planāru grafu plakanizācijas piemēri



3.62. attēls. Ilustrācija grafa K_5 neplanaritātes pierādījumam ieskaitot ārējo skaldni, ir trijstūris.

2.4. teorēma. Γ ir maksimāls plakans grafs $\Longleftrightarrow$ Γ ir triangulācija.

PIERĀDĪJUMS

$\Longrightarrow$ Pieņemsim, ka $\exists$ skaldne, kas nav trijstūris, tai ir vairāk kā 3 šķautnes $\Longrightarrow$ var pievienot vienu šķautni, kas ir šīs skaldnes diagonāle/

$\Longleftarrow$ Pieņemsim, ka Γ ir triangulācija. Pieņemsim, ka pievienojot jaunu šķautni e, jaunais grafs $\Gamma' = \Gamma + e$ ir plakans. Šķautne e sadala vienu grafa Γ skaldni 2 daļās. Bet tas nav iespējams, jo $\forall$ Γ skaldne ir trijstūris - pretruna. ■

2.4. Eilera formula un tās sekas

2.5. teorēma. (Eilera formula) $\Gamma = (V, E)$ - sakarīgs plakans grafs. Tad

$$|V| - |E| + |r| = 2.$$

PIERĀDĪJUMS Indukcija ar indukcijas argumentu $|E|$.

Indukcijas bāze:

$|E| = 1 \implies |V| = 1$, $|r| = 1$ un apgalvojums ir patiess.

Indukcijas solis

Pieņemsim, ka formula ir pareiza visiem grafiem ar $|E|$ šķautnēm ($|V|$ virsotnēm un $|r|$ skaldnēm).

Pievienosim vēl vienu šķautni, iegūsim grafu ar $|E'| = |E| + 1$ šķautnēm, $|V'|$ virsotnēm un $|r'|$ skaldnēm un pierādīsim, ka formula paliek spēkā.

Ir iespējami 2 gadījumi:

- pievienotā šķautne savieno jau eksistējošas virsotnes $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} |E'| = |E| + 1 \\ |V'| = |V| \\ |r'| = |r| + 1 \end{cases} \Longrightarrow |V'| - |E'| + |r'| = 2.$$

- pievienotā šķautne savieno jau eksistējošu virsotni ar jaunu virsotni $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} |E'| = |E| + 1 \\ |V'| = |V| + 1 \\ |r'| = |r| \end{cases} \Longrightarrow |V'| - |E'| + |r'| = 2.\blacksquare$$

2.2. piezīme. Seko, ka visām planāra grafa plakanizācijām ir vienāds skaldņu skaits $|r| = |E| - |V| + 2$.

2.6. teorēma. $\Gamma = (V, E)$ - sakarīgs planārs grafs, $|V| \geq 3$. Tad

1. $|E| \leq 3|V| - 6$.
2. $\delta(\Gamma) \leq 5$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\forall$ skaldni ierobežo vismaz 3 šķautnes, $\forall$ šķautne ierobežo ne vairāk kā 2 skaldnes. Apiesim katru skaldni un skaitīsim šķautnes. Iegūsim kādu skaitli N:

- $N \geq 3|r|$, jo katras skaldnes ieguldījums ir ne mazāks par 3;
- $N \leq 2|E|$, jo katras šķautnes ieguldījums ir ne lielāks kā 2.

$$\Longrightarrow\ 3|r| \leq 2|E| \ \Longrightarrow\ 2 = |V| - |E| + |r| \leq |V| - |E| + \frac{2|E|}{3} \ \Longrightarrow$$
$|E| \leq 3|V| - 6$.

2. Seko no 1. Pieņemsim, ka $|V| \geq 7$.

$$\delta(\Gamma) \cdot |V| \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \leq 2(3|V| - 6) = 6|V| - 12 \ \Longrightarrow$$

$$(\delta - 6)|V| \leq -12 \ \Longrightarrow\ \delta - 6 < 0 \ \Longrightarrow\ \delta < 6. \ \blacksquare$$

2.5. Kuratowski-Wagner kritērijs

Grafu minori

Šķautnes savilkšana. Virsotnes u un v, kas incidentas ar doto šķautni, tiek apvienotas vienā virsotnē, šķautnes, kas ir incidentas ar u un v, tiek identificētas. Šķautnes e savilkšanu grafā Γ apzīmēsim ar Γ/e.

Par grafa Γ *minoru* sauksim jebkuru grafu, ko var iegūt no Γ, vairākkārt pielietojot šādas operācijas:

1. šķautņu izdzēšanu,
2. šķautņu savilkšanu,
3. izolētu virsotņu izdzēšanu.

2.7. teorēma. (Kuratowski-Wagner planaritātes kritērijs). Γ - planārs $\iff$ Γ nav minoru izomorfu ar K_5 vai $K_{3,3}$.

PIERĀDĪJUMS Pierādījums ir grūts un netiks dots. ■

3. 12.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

12.1 Atrast $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$, χ, χ_1, *dom* šādiem grafiem:

(a) cikls C_n,
(b) pilnais grafs K_n,
(c) 3×3 tabula,
(d) kuba grafs,
(e) Petersena grafs.

12.2 Pierādīt, ka jebkurš $K_{3,3}$ īsts apakšgrafs ir planārs.

12.3 Noteikt, vai grafi ir planāri:

(a) $K_{3,3}$,
(b) $K_{2,4}$,
(c) $K_{2,2,2}$,
(d) Petersena grafs.

12.4 Pierādīt, ka jebkuru grafu var ievietot trīsdimensiju telpā tā, lai šķautnes krustotos tikai virsotnēs.

12.5 (a) Konstruēt piemērus planāriem grafiem, kuriem $|E| = 3|V| - 6$ un $|V| \in \{3, 4, 5, 6\}$.
(b) Konstruēt piemērus neplanāriem grafiem, kuriem $|E| = 3|V| - 5$ un $|V| \in \{4, 5, 6\}$.

12.6 Pierādīt, ka grafam Γ ir minors, kas ir izomorfs grafam Δ.

(a) Γ - 2×2 tabula, Δ - K_4;
(b) Γ - Petersena grafs, Δ - K_5.

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

12.7