DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

11.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt ciklu teorijas pamatfaktus.

Lekcijas kopsavilkums:

- ciklu pētīšanai var izmantot lineārās algebras metodes,

- visas grafa šķautnes veido ciklu (Eilera ciklu) tad un tikai tad, ja katras virsotnes pakāpe ir pāra skaitlis,
- noteikt, vai eksistē cikls, kas satur katru virsotni vienu reizi (Hamiltona cikls), nav viegli.

Svarīgākie jēdzieni: cikls, vienkāršs cikls, cikla šķautņu kopa, sķautņu telpa, ciklu telpa, fundamentālie cikli, Eilera cikls un ķēde, Hamiltona cikls un ķēde.

Svarīgākie fakti un metodes: inducētie vienkāršie cikli veido ciklu telpu, ciklu telpas elementa kritēriji, teorēma par fundamentālajiem cikliem, teorēma par Eilera cikliem, Eilera ķēdes eksistences kritērijs, teorēma par Hamiltona ķēdes eksistenci.

1. Cikli

1.1. Vispārīgā teorija

1.1.1. Definīcijas un interpretācijas

Vispārīgā gadījumā grafs var stipri atšķirties no koka - tajā var būt apakšgafi, kas ir izomorfi cikliem.

Tātad ciklu skaits un izvietojums raksturo to, cik stipri grafs atšķiras no koka.

Ciklu var definēt/interpretēt šādos veidos:

- kēdi/vienkāršu ķēdi ar pozitīvu garumu, kuras pirmā virsotne sakrīt ar pēdējo,
- apakšgrafu vai inducētu apakšgrafu, kas ir izomorfs ciklam,
- šķautņu kopas apakškopu, no kuras var rekonstruēt ciklu vai ciklu apvienojumu.

1.1.2. Lineārā algebra un cikli

$\Gamma = (V, E)$ - (neorientēts) grafs, $V = \{v_1, ..., v_n\}$, $E = \{e_1, ..., e_m\}$.

Šķautņu telpa

$L(E) = Fun(E, \mathbb{F}_2) = \langle e_1, ..., e_m \rangle$ (standarta bāze) - Γ *šķautņu telpa* ($\mathbb{F}_2$-lineāra telpa):

- $L(E)$ elementi - E apakškopas,
- summa - šķautņu apakškopu simetriskā starpība,
- nulles elements - $\varnothing$,
- $\forall\ F \subseteq E$, $F = \sum\limits_i \mu_i e_i$. kur $\mu_i = \begin{cases} 1, e_i \in F \\ 0, e_i \notin F \end{cases}$
- $\dim L(E) = |E| = m$.

Ciklu telpa

Γ vienkāršam ciklam C var piekārtot tā šķautņu kopu $E(C)$, kas to viennozīmīgi nosaka.

Pieņemsim, ka Γ vienkāršie cikli ir $C_1, ..., C_r$.

Γ *ciklu telpa* $C(\Gamma)$ - $L(E)$ apakštelpa, kuras veidotājelementu kopa ir $\{E(C_1), ..., E(C_r)\}$:

$$C(\Gamma) = \langle E(C_1), ..., E(C_r) \rangle.$$

Citiem vārdiem sakot, $C(\Gamma)$ elementi izsakās kā C_i simetriskās starpības.

1.1. teorēma. *$D_1, ..., D_s$ - visi Γ inducētie vienkāršie cikli. Tad*

$$C(\Gamma) = \langle E(D_1), ..., E(D_s) \rangle.$$

PIERĀDĪJUMS Pilns pierādījums nav dots, diskusija. Var izmantot indukciju ar parametru $|E(C)|$.

Ja ciklam ir tikai viena horda, tad to var iegūt kā divu vienkāršu inducētu ciklu simetrisko starpību. Tālāk izmantot indukciju. ■

1.2. teorēma. $F \subseteq E$. Zemāk dotie apgalvojumi ir ekvivalenti.

1. $F \in C(\Gamma)$.
2. F ir šķautņu šķirtu vienkāršu ciklu apvienojums,
3. grafam $\Gamma_F = (V, F)$ katrai virsotnei pakāpe ir pāra skaitlis.

PIERĀDĪJUMS
$\underline{1 \Longrightarrow 3}$

Katram vienkāršam ciklam virsotņu pakāpes ir 0 vai 2 - pāra skaitļu. Simetriskā starpība saglabā šo īpašību.

$\underline{3 \Longrightarrow 2}$

Var izmantot indukciju ar parametru - šķautņu skaits.

Γ_F katrai virsotnei pakāpe ir pāra skaitlis $\Longrightarrow$ F nav aciklisks $\Longrightarrow$ satur vismaz vienu vienkāršu ciklu C $\Longrightarrow$ izdzēšot C šķautnes iegūsim F' ar mazāku elementu (šķautņu) skaitu, uz kuru attiecas indukcijas pieņēmums.

$\underline{2 \Longrightarrow 1}$

Seko no ciklu telpas definīcijas. ■

1.1.3. Fundamentālie cikli un ciklomātiskais skaitlis

Katram sakarīgam grafam eksistē pārklājošais koks.

Fiksēsim sakarīga grafa Γ pārklājošo koku T. Γ *fundamentāls cikls, kas ir asociēts ar* T - cikls $C(T, e)$, kas veidojas pievienojot T vienu papildus šķautni e no $E \backslash E(T)$.

1.3. teorēma. $\Gamma = (V, E)$ - sakarīgs grafs, T - tā pārklājošs koks.

1. Fundamentālie cikli ir $C(\Gamma)$ bāze.
2. Fundamentālie griezumi ir $G(\Gamma)$ bāze.
3. $\dim C(\Gamma) = |E| - |V| + 1$ (Γ *ciklomātiskais skaitlis*).

4. $\dim G(\Gamma) = |V| - 1.$

PIERĀDĪJUMS

$\forall\ e \in E \backslash E(T)$ izpildās $\begin{cases} e \in C(T, e) \\ e \notin C(T, e'), e \neq e' \end{cases} \Longrightarrow C(T, z)$ nevar tikt iegūts kā pārējo fundamentālo ciklu lineāra kombinācija.

$\Longrightarrow$ kopa $\{C(T, z)\}_{e \in E \backslash E(T)}$ - lineāri neatkarīga $\Longrightarrow$ $\dim C(\Gamma) \geq |E| - |V| + 1$ ■

1.2. Eilera cikli

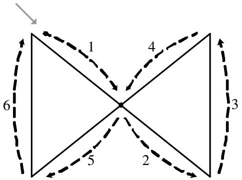
Grafa *Eilera cikls* - cikls, kas satur katru šķautni tieši vienu reizi.

Grafa *Eilera ķēde* - ķēde, kas satur katru šķautni tieši vienu reizi.

Ja grafā eksistē Eilera cikls, tad to sauc par *Eilera grafu*.

Orientēta grafa *virzīts Eilera cikls* - virzīts cikls, kas satur katru šķautni tieši vienu reizi.

1.1. piemērs.



3.52. attēls. Eilera cikla piemērs

1.4. teorēma. $\Gamma = (V, E)$ - sakarīgs un netriviāls. Zemāk dotie apgalvojumi ir ekvivalenti.

1. Γ ir Eilera grafs.
2. grafā Γ katras virsotnes pakāpe ir pāra skaitlis.

PIERĀDĪJUMS

<u>1. $\Longrightarrow$ 2.</u>

Katrā virsotnē Eilera cikls ieiet un iziet vienādu skaitu reižu, tāpēc katras virsotnes pakāpe ir pāra skaitlis.

<u>2. $\Longrightarrow$ 1.</u>

Apskatīsim garāko ķēdi $K = (v_0, e_1, v_1, ..., e_l, v_l)$, kas satur katru šķautni ne vairāk kā vienu reizi.

K garums ir maksimāls $\Longrightarrow$ K satur visas šķautnes, kas ir incidentas ar v_l.

$v_0 \neq v_l$ $\Longrightarrow$ pretruna, jo $\forall$ virsotnes pāriešana patērē 2 šķautnes, $d(v_l)$ - pāra skaitlis, tātad nevar būt, ka maršruts beidzas ar $v_l \neq v_0$. Tātad K - cikls.

Ja K nav Eilera cikls, tad $\exists$ šķautne e, kas

- neieiet K,
- ir incidenta ar kādu K virsotni v_i: $e = \{v_i, w\}$, tas seko no sakarīguma, jo no jebkuras šķautnes, kas neieiet K, var atrast

maršrutu līdz kādai K virsotnei, defināsim e kā vienu no šķautnēm, kas ir tuvu pie K.

K ir cikls, tāpēc ķēde $(w, e, v_i, e_{i+1}, ..., v_0, e_1, ..., e_i, v_i)$ ir garāka nekā K - pretruna. ■

1.5. teorēma. Sakarīgam grafam Γ eksistē Eilera ķēde tad un tikai tad, ja Γ ir tieši divas nepāra virsotnes.

PIERĀDĪJUMS Ja grafā Γ eksistē Eilera ķēde, tad pievienojot vienu papildus šķautni no šīs ķēdes sākuma līdz beigām, iegūsim Eilera ciklu. Seko, ka sākotnējā grafā Γ tikai divām virsotnēm ir nepāra pakāpes.

Ja grafā Γ tikai divām virsotnēm ir nepāra pakāpes, tad pievienojot vienu papildus šķautni starp šīm virsotnēm iegūsim Eilera grafu. Izmetot no Eilera cikla jauno šķautni iegūsim Eilera ķēdi sākotnējā grafā Γ. ■

1.1. piezīme. Eilera ciklus un ķēdes pielieto olimpiāžu uzdevumos, kuros ir jāauzzīmē kāda figūra tā, lai nekāda līnija nebūtu pārvilkta vairāk kā vienu reizi.

1.3. Hamiltona cikli

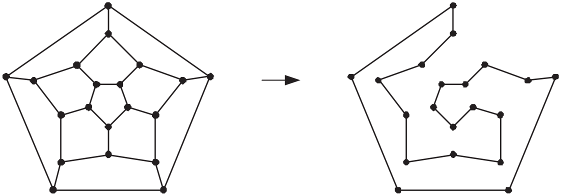
Grafa *Hamiltona cikls* - cikls, kas satur katru virsotni tieši vienu reizi (pārklājošais cikls).

Grafa *Hamiltona ķēde* - ķēde, kas satur katru virsotni tieši vienu reizi.

Ja grafā eksistē Hamiltona cikls, tad to sauc par *Hamiltona grafu*.

Par *virzītu Hamiltona ciklu* sauc virzītu ciklu, kas satur katru virsotni tieši vienu reizi.

1.2. piezīme. 3.53 attēlā ir parādīts Hamiltona cikls dodekaedra grafā.



3.53. attēls. Hamiltona cikls dodekaedra grafā

Meklējot Hamiltona ciklu var izmantot šādus vienkāršus novērojumus:

- ja virsotnes pakāpe ir 2, tad abas šķautnes ir Hamiltona ciklā,
- ja kādai virsotnei eksistē divas tai incidentas šķautnes, kuru piedalīšanās Hamiltona ciklā ir pierādīta, tad pārējās incidentās šķautnes var tikt nodzēstas.
- Hamiltona grafam nevar būt šarnīri, tātad Hamiltona grafs ir 2-sakarīgs.

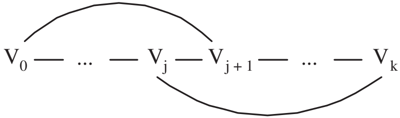
1.6. teorēma. $\Gamma = (V, E)$ - (neorientēts) grafs, $|V| \geq 3$, $\delta(\Gamma) \geq \dfrac{|V|}{2}$. Tad Γ ir Hamiltona grafs.

PIERĀDĪJUMS Γ ir sakarīgs, jo pretējā gadījuma mazākajā komponentē virsotņu pakāpes būtu lielākas nekā komponentes virsotņu skaits.

Pieņemsim, ka virsotņu virkne $K = (v_0, ..., v_k)$ ir garākā ķēde grafā Γ.

K - maksimāla $\Longrightarrow$ visas virsotnes, kas ir savienotas ar v_0 vai v_k, pieder virknei K $\Longrightarrow$

- vismaz $\dfrac{|V|}{2}$ no virsotnēm $\{v_0, ..., v_{k-1}\}$ ir savienotas ar v_k,
- vismaz $\dfrac{|V|}{2}$ virsotnēm $v_i \in \{v_0, ..., v_{k-1}\}$ piemīt šāda īpašība: v_{i+1} un v_0 ir savienotas.

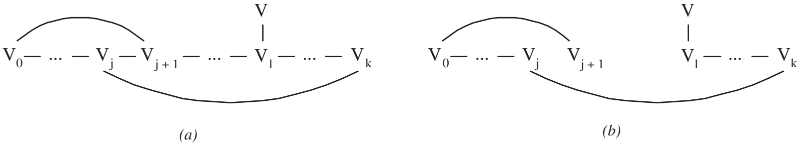


3.56. attēls. Ilustrācija teorēmas 3.112. pierādījumam

$\frac{|V|}{2} + \frac{|V|}{2} = |V| > |V| - 1 \geq \left|\{v_0, ..., v_{k-1}\}\right|$ (virsotne v_k vēl paliek pāri) $\Longrightarrow$ saskaņā ar Dirihlē principu $\exists$ virsotne v_j, kas apmierina abus nosacījumus.

Apskatīsim ķēdi $H = (v_0, v_{j+1}, v_{j+2}, ..., v_k, v_j, v_{j-1}, ..., v_0)$.

H Hamiltona cikls, tāpēc ka pretējā gadījumā šis cikls varētu tikt pārveidots par ķēdi, kuras garums ir lielāks nekā ķēdes K garums, pievienojot šim ciklam ar vienas šķautnes palīdzību kādu no kopas $V \setminus \{v_0, ..., v_k\}$ virsotnēm, vismaz viena šāda šķautne eksistē, tā kā grafs Γ ir sakarīgs (skatīt 3.57.(b) attēlā) ■



3.57. attēls. Ilustrācija teorēmas 3.112. pierādījumam

1.3. piezīme. Hamiltona cikla meklēšana ir grūts uzdevums, nav zināmi algoritmi, izņemot visu variantu pārmeklēšanu.

2. 11.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

11.1 Uzzīmēt fundamentālo ciklu sistēmas piemēru šādiem grafiem:

(a) ciklam C_n,
(b) pilnajam grafam K_4,
(c) oktaedra grafam.

11.2 No stieples ir jāizloka dotās figūras tā, lai neviena līnija netiktu dublēta (stieples gabali var krustoties). Kāds ir minimālais stieples gabalu skaits, kas ir nepieciešams, lai iegūtu šādas figūras:

(a) tetraedru,
(b) kubu,
(c) Dāvida zvaigzni,
(d) tabulu ar izmēriem 5×5?

11.3 Noteikt, kuri no dotajiem grafiem ir Hamiltona grafi:

(a) $K_{3,3}$,
(b) $K_{2,4}$,

(c) $K_{2,2,2}$,
(d) Petersena grafs.

11.4 Siera gabals ar izmēriem $3 \times 3 \times 3$ ir sadalīts mazākās daļās ar izmēriem $1 \times 1 \times 1$. Pele grauž sieru, katru dienu apēdot vienu no mazajiem gabaliem un pārejot uz citu gabalu, kuram ar apēsto gabalu bija kopīga skaldne. Vai pele var grauzt sieru tā, lai pēdējais apēstais gabals būtu centrā?

11.5 Orientētu grafu sauc par *pilnu orientētu grafu*, ja starp jebkurām 2 virsotnēm ir vismaz viena šķautne. Pierādīt, ka jebkurš pilns orientēts grafs satur orientētu Hamiltona ķēdi.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

11.6 $\Gamma = (V, E)$ - (neorientēts) grafs. Maršrutus $(v_0, ..., v_k)$ un $(w_0, ..., w_k)$ sauc par līdzīgiem, ja eksistē $f \in Aut(\Gamma)$:

$$w_i = f(v_i), \forall\ i.$$

Maršrutu līdzība ir ekvivalences attiecība. Atrast Hamiltona ciklu ekvivalences klases visiem regulāro daudzskaldņu grafiem.

11.7 Vai ir iespējams izkārtot skaitļus $0, 1, 2, ..., 9$ pa apli tā, lai jebkuru divu blakus stāvošu skaitļu starpība (absolūtā vērtība) būtu vienāda ar $3, 4$ vai 5.