DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

10.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt koku teorijas pamatus.

Lekcijas kopsavilkums:

- kokiem piemīt vairākas īpašības, kas tos atsķir ko pārējiem grafiem.

Svarīgākie jēdzieni: mežs, koks, pārklājošais koks, koka orientācija ar dotu sakni, koka orientācijas inducētais daļējais sakārtojums, pseidokoks, pseidomežs, orientēts koks, binārais koks.

Svarīgākie fakti un metodes: teorēma par koka kritērijiem, koku īpašības, pārklājošo koku eksistence, orientētu koku īpašības.

1. Koki

1.1. Neorientētie koki

1.1.1. Pamatfakti

Aciklisks grafs, *mežs* - grafs, kurā nav apakšgrafu, kas ir izomorfi cikliem.

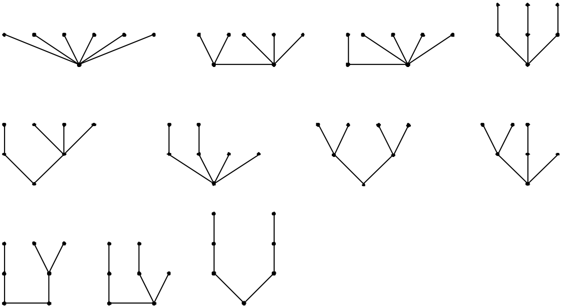
Koks (A.Kēli, A.Cayley) - sakarīgs aciklisks grafu.

Grafa apakšgrafs, kas satur visas virsotnes un ir koks - grafa *pārklājošais koks*.

Vienkāršākās koku īpašības:

- katra koka virsotne, kuras pakāpe ir lielāka nekā 1, ir šarnīrs, tādējādi kokiem $\kappa = 1$ - ir vismaz viens šarnīrs;
- katra koka šķautne ir tilts, tādējādi kokiem $\lambda = 1$;
- katra koka virsotne ir bloks,

- katrs koks ir pārklājošais koks attiecībā uz sevi,
- katrs koks ir divdaļīgs;
- katram kokam ir virsotnes ar pakāpi 1 - *lapas.*



3.41. attēls. Visi koku izomorfisma tipi ar 7 virsotnēm

1.1. teorēma. $\Gamma = (V, E)$. Zemāk dotie apgalvojumi ir ekvivalenti:

1. Γ - koks;
2. Γ - sakarīgs grafs un $|E| = |V| - 1$;
3. Γ - aciklisks grafs un $|E| = |V| - 1$;
4. grafā Γ jebkuras divas virsotnes savieno tieši viena ķēde;

5) Γ - aciklisks grafs, kuram pievienojot vienu jaunu šķautni iegūst grafu ar tieši vienu ciklu.

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim teorēmu, izmantojot ciklisko pierādīšanas tehniku. Ir jāpierāda, ka $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4) \implies (5) \implies (1)$.

$(1) \implies (2)$**:** indukciju ar parametru $|V|$.

Indukcijas bāze. ja $|V| = 1$, tad izteikums ir acīmredzams.

Indukcijas solis. Pieņemsim, ka apgalvojums ir patiess visiem grafiem, kuriem $|V| < n$, pierādīsim, ka tad apgalvojums ir patiess grafiem, kuriem $|V| = n$.

$|V| = n$. Ja $|V| > 1$, tad $\forall$ šķautnei e grafs $\Gamma - e$ satur 2 komponentes - kokus (grafā Γ nav ciklu) Γ_1 un Γ_2.

Pieņemsim, ka šajās komponentēs ir $|V_i| < n$ virsotnes un $|E_i|$ šķautnes. Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu $|E_i| = |V_i| - 1 \implies$

$|E| = |E_1| + |E_2| + 1 = (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) + 1 = (|V_1| + |V_2|) - 1 = |V| - 1.$

(2) $\implies$ (3): Γ ir sakarīgs grafs un $|E| = |V| - 1$. Jāpierāda, ka grafā nav ciklu.

Pieņemsim, ka $\exists$ cikls, kas satur šķautni e. Grafs $\Gamma - e$ ir sakarīgs un satur $|V| - 2$ šķautnes. Tāds grafs nevar būt sakarīgs, jo tam šķautņu skaits ir par 2 mazāks nekā virsotņu skaits.

(3) $\implies$ (4): pieņemsim, ka Γ ir aciklisks un $|E| = |V| - 1$. Pieņemsim, ka grafa komponenšu skaits ir c un i-tās komponentes virsotņu un šķautņu skaits ir $|V_i|$ un $|E_i|$.

$\forall$ komponente ir koks $\implies |E_i| = |V_i| - 1 \implies$

$$|E| = \sum_{i=1}^{c}(|V_i| - 1) = |V| - c.$$

$\implies c = 1$ - grafs ir sakarīgs. Ja eksistētu 2 virsotnes, kuras saista 2 dažādas ķēdes, tad eksistētu cikls.

(4) $\implies$ (5)**:** ja grafā Γ būtu cikls, tad eksistētu divas dažādas ķēdes, kas savienotu divas virsotnes. Ja, pievienojot vienu šķautni, iegūtu divus dažādus ciklus, tad sākotnējā grafā starp attiecīgajām virsotnēm eksistētu divas dažādas ķēdes.

(5) $\implies$ (1)**:** pierādīsim, ka grafs Γ ir sakarīgs. Ja virsotnes u un v piederētu 2 dažādām komponentēm, tad, pievienojot šķautni (u, v), mēs neiegūtu ciklu. ■

1.1. piezīme. Kokus var zīmēt šādos veidos:

1. kā planāru grafu, akcentējot svarīgus invariantus, piemēram, diametru,

2. kā *sakņotu koku*, apakšējo virsotni sauc par *sakni* (sakni bieži zīmē augšā).

1.1.2. Īpašības

1.2. teorēma.

1. Ja sakarīgam grafam ar n virsotnēm ir vismaz n šķautnes, tad tas satur ciklu - nav koks.
2. Kokā ir vismaz 2 virsotnes ar pakāpi 1.
3. Kokā jebkurām trīs virsotnēm a, b, c ķēdēm (a, b), (a, c) un (b, c) ir tieši viena kopīga virsotne.

PIERĀDĪJUMS
1. Seko no koka šķautņu skaita īpašības.

2. Pieņemsim, ka $|V(T)| = |V|$ virsotnes. Tā kā

$$\sum_{v \in V(T)} d(v) = 2(|V| - 1) \leq 2|V|,$$

tad vismaz 2 saskaitāmie kreisajā pusē ir vienādi ar 1.

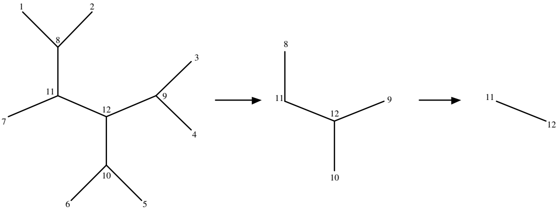
3. Uzzīmēt koku kā sakņotu koku ar a kā sakni, apskatīt visus gadījumus. ■

1.3. teorēma. Koka centrs satur 1 vai 2 virsotnes.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka grafs satur vismaz 3 virsotnes. Sāksim izdzēst virsotnes ar pakāpi 1 šādā veidā:

1. sākotnējā grafā Γ izdzēsīsim visas virsotnes ar pakāpi 1, iegūsim grafu Γ_1: $Z(\Gamma_1) = Z(\Gamma)$;
2. grafā Γ_1 izdzēsīsim visas virsotnes ar pakāpi 1, iegūsim grafu Γ_2: $Z(\Gamma_2) = Z(\Gamma_1) = Z(\Gamma)$;
3. ...

Pēc galīga soļu skaita iegūsim triviālo grafu vai K_2, kuriem centrs satur vienu vai divas virsotnes. ■



3.42. attēls. Ilustrācija teorēmas par koka centru pierādījumam

1.4. teorēma. Katrs koks ir divdaļīgs grafs.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs vai diskusija. ■

1.1.3. Koku orientēšana

T - koks, $v \in V(T)$.

Par T *orientāciju ar sakni* v sauc orientētu grafu (T_v), kuru iegūst no T šādā veidā:

1. definējam $N_i = \{w \in V(T) | dist(w, v) = i\}$,
2. $\forall$ šķautnei $a \overset{e}{-} b$, kur $a \in N_i$, $b \in N_{i+1}$, piešķirsim virzienu $a \to b$.

1.2. piezīme. Izvēloties sakni $v \in V(T)$, orientācija T_v tiek noteikta viennozīmīgi.

T_v definē kopā $V(T)$ attiecību $\leq$ - T_v*-koka sakārtojumu*, šādā veidā: $u \leq w \iff \exists$ orientēta ķēde orientētajā kokā T_v no u uz w.

1.3. piezīme. $u < w$, ja u ir "zemāk" saknotajā kokā nekā w.

1.5. teorēma. Attiecība $\leq$ ir daļējs sakārtojums koka virsotņu kopā.

PIERĀDĪJUMS Jāpārbauda, ka attiecība $\leq$ ir refleksīva, antisimetriska un tranzitīva.

1. refleksivitāte - $u \leq u$ - acīmredzami.
2. antisimetrija - $u \leq v \ \vee \ v \leq u \implies u = v$. Ja elementi u un v ir salīdzināmi abās kārtībās, tad tie ir vienā ķēdē un vienā līmenī $\implies u = v$.
3. tranzitivitāte - $\begin{cases} u \leq v \\ v \leq w \end{cases} \implies u \leq w$. Elementi u, v un w ir vienā ķēdē, kurā u ir minimālais elements un w - maksimālais. ■

Definēsim

$$T(u) = \{w \in V(T) \big| w \geq u\},$$

$$T^{-1}(u) = \{w \in V(T) \big| w \leq u\}.$$

1.4. piezīme. Sakne ir minimālais elements, lapas ir maksimālie elementi, $\forall$ virsotnei u inducētais apakšgrafs ar virsotņu kopu $T^{-1}(u)$ ir orientēta ķēde.

1.2. Pārklājošie koki

1.2.1. Pārklājošā koka eksistence

1.6. teorēma.

1. Katram sakarīgam grafam eksistē pārklājošais koks.
2. Katrs pārklājošais koks satur katru tiltu.

PIERĀDĪJUMS

1. Ja grafs $\Gamma = (V, E)$ sākotnēji nav koks, tad pakāpeniski pa vienai izdzēsīsim šķautnes, kas ieiet ciklos, katrā solī izdzēšot jebkuru no šķautnēm, kas piedalās kādā no cikliem.

Tā kā neviena šāda šķautne nevar būt tilts, tad tās izdzēšana nepadara grafu par nesakarīgu.

Katrā šādā šķautnes izdzēšanas operācijā virsotņu skaits nemainās, bet šķautņu skaits samazinās par 1.

Pēc galīga skaita soļu mēs iegūsim sakarīgu grafu Γ', kuram šķautņu skaits ir $|V| - 1$. $\Gamma' \leq \Gamma$, Γ' satur visas virsotnes un ir koks.

2. ■

Grafa dažādo pārklājošo koku skaits ir tā invariants - grafa *kompleksitāte*.

1.2.2. Attālumu un normālie pārklājošie koki

Γ apakšgrafu - koku T_v ar sakni v sauc par *v-attālumu koku*, ja $\forall\ w \in V(T_v)$:

$$dist_\Gamma(v, w) = dist_{T_v}(v, w).$$

Γ apakšgrafu - koku T_v ar sakni v sauc par *v-normālu koku*, ja

$$u \sim_\Gamma w,\ u, w \in V(T_v) \implies u \leq_T w\ \vee\ w \leq_T u$$

(salīdzināšana ir T_v-koka sakārtojumā).

1.7. teorēma. Γ - sakarīgs grafs. Tad $\forall\ v \in V(\Gamma)\ \exists$

1. pārklājošs v-attālumu koks,
2. pārklājošs v-normāls koks ar sakni.

PIERĀDĪJUMS Netiek dots.
■

1.2.3. Citi pārklājošie koki ar noteiktām īpašībām

Tiek pētīti arī pārklājošie koki ar šādām īpašībām:

- ar maksimālu/minimālu lapu skaitu;
- ar maksimālu/minimālu lapu diametru;
- ar maksimālās virsotnes pakāpes ierobežojumu.

1.3. Orientēti un bināri koki

1.3.1. Orientēti koki

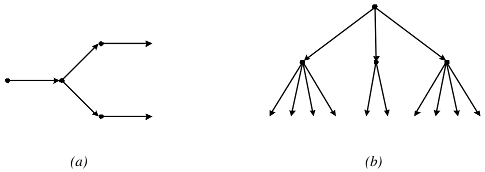
Orientētu grafu sauksim par *orientētu koku (orientētu sakņotu koku)*, ja izpildās šādi nosacījumi:

1) eksistē viena virsotne (*sakne*), kuras pozitīvā puspakāpe ir vienāda ar 0;

2) visu pārējo virsotņu pozitīvā puspakāpe ir vienāda ar 1;

3) eksistē tieši viena virzīta ķēde no saknes uz jebkuru citu virsotni.

1.1. piemērs. 3.43.attēlā ir doti orientētu koku piemēri.



3.43. attēls. Orientētu koku piemēri

1.8. teorēma. Orientētiem kokiem piemīt šādas īpašības:

1) aizmirstot šķautņu orientāciju orientētajā kokā, iegūst koku;
2) inducētais apakšgrafs, kura virsotņu kopa ir vienāda ar to virsotņu kopu, kuras ir sasniedzamas no kādas fiksētas virsotnes v, ir orientēts koks ar sakni v;
3) ja ir dots (neorientēts) koks, tad, izvēloties jebkuru virsotni par sakni, var viennozīmīgi konstruēt orientētu koku.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs vai diskusija. ■

Orientēto koku teorijā tradicionāli tiek pielietota botāniskas vai ģenealoģiskas izcelsmes terminoloģija.

Orientēta koka virsotne ar negatīvo puspakāpi 0 - *lapa*.

Ķēde no saknes līdz lapai - *zars*.

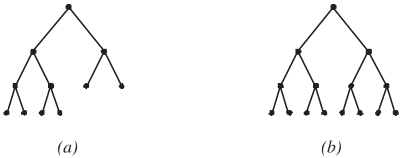
Sakni zīmē vai nu apakšā vai augšā.

1.3.2. Binārie koki

Binārie koki ir orientēto koku speciālgadījums. Parasti binārajiem kokiem sakni zīmē augšā.

Binārs koks ir orientēts koks, kurā

- katrai virsotnei ir ne vairāk kā 2 dēli,
- katras virsotnes dēlu kopā ir dota funkcija uz divu elementu kopu {*kreisais (jaunākais)*, *labais (vecākais)*} (citiem vārdiem sakot, ir noteikts, kāds dēls ir kreisais (jaunākais) un kāds - labais (vecākais)).



3.46. attēls. Bināru koku piemēri

1.4. Pseidokoki

1.4.1. Definīcijas

Neorientētu grafu ar sauksim par *neorientētu pseidokoku*, ja:

1. tas ir sakarīgs;
2. tam ir ne vairāk kā viens cikls.

Neorientētu grafu sauksim par *neorientētu pseidomežu*, ja katra sakarības komponente ir pseidokoks.

Orientētu grafu sauksim par *orientētu pseidokoku,* ja

1. atbilstošais neorientētais grafs ir neorientētais pseidokoks;
2. cikls ir orientēts vienā virzienā;
3. ∀ sakņotais koks ar sakni - cikla virsotni, ir orientēts virzienā uz sakni;
4. ja neorientētajā grafā nav cikla, tad sakne ir viena virsotne ar cilpu.

Ekvivalenta definīcija: $d_-(v) = 1 \ \forall \ v \in V$.

Orientēts pseidomežs ir orientēts grafs, kura katra vājās sakarības komponente ir orientēts pseidokoks.

1.4.2. Pielietojumi

1.9. teorēma. A - galīga kopa. $f : A \longrightarrow A$ funkcija. Tad f funkcionālais grafs ir orientēts pseidomežs.

PIERĀDĪJUMS Izmantojam definīciju $d_-(v) = 1 \,\forall\, v \in V$. Patstāvīgs darbs vai diskusija. ■

1.5. Koku skaitīšana

Grafus var skaitīt vismaz 2 veidos:

1. ar fiksētu virsotņu kopu, izomorfi grafi var tikt skaitīti vairākas reizes, teiksim, ka tiek skaitīti grafi ar *iezīmētām virsotnēm*, tas ir vieglāk;
2. katra izomorfisma klase tiek skaitīta vienu reizi, teiksim, ka tiek skaitīti grafi ar *neiezīmētām virsotnēm*, tas ir grūtāk.

1.10. teorēma. (Cayley, Joyal) (Neorientētu) koku ar n iezīmētām virsotnēm skaits ar n^{n-2}.

PIERĀDĪJUMS Pierādījums grūts, pilnīgā netiek dots. Teorēmas pierādījuma ideja balstās uz funkcijas uzdošanu orientēta pseidokoka veidā. Tiek izmantota skaitīšana ar bijekcijas palīdzību.

Fiksēsim skaitāmo koku virsotņu kopu $V = \{1, ..., n\}$.

Apskatīsim V endofunkcijas (funkcijas sevī). Šādu funkciju skaits ir vienāds ar n^n un katrai funkcijai $f : V \to V$ var piekārtot pseidomežu - orientētu grafu $\Gamma(f)$ ar virsotņu kopu V, kuram šķautnes ir formā $(i, f(i))$.

Var atrast bijekciju φ starp V endofunkciju kopu $Z(V)$ un kopu $V \times V \times T(V)$, kur $T(V)$ - neorientētu koku kopa ar virsotņu kopu V - tas ir GRŪTI.

Funkcija φ ir bijektīva $\Longrightarrow$

$$|V \times V \times T(V)| = |V| \cdot |V| \cdot |T(V)| = |Z(V)|$$

$\Longrightarrow n^2|T(V)| = n^n$. Iegūstam, ka visu koku skaits ar n virsotnēm ir vienāds ar n^{n-2}.$\blacksquare$

2. 10.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

10.1 Pierādīt, ka ja Γ ir koks ar vismaz 5 virsotnēm, tad $\overline{\Gamma}$ nav koks.

10.2 Pierādīt, ka kokam T eksistē vismaz $\Delta(T)$ lapas. Konstruēt koku T, kuram lapu skaits ir vienāds ar $\Delta(T)$.

10.3 Pierādīt, ka jebkurš koka automorfisms fiksē vainu vismaz vienu virsotni vai vismaz vienu šķautni.

10.4 Starp visiem kokiem ar 7 virsotnēm atrast koku ar minimālo un maksimālo automorfismu grupu. To pašu izdarīt ar kokiem ar 8 virsotnēm.

10.5 Atrast kompleksitāti šādiem grafiem:
   (a) ciklam C_n,
   (b) kuba grafam.

10.6 Volejbola tīklam ir taisnstūrveida rūtiņas, tā izmēri ir 40×500. Kāds ir maksimālais virvīšu skaits, kuras var pārgriezt tā, lai tīkls nesadalītos divās daļās?

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

10.7 Pierādīt, ka katru neorientētu sakarīgu grafu, kuram katras virsotnes pakāpe ir pāra skaitlis, var orientēt tā, lai tam būtu viena stipri sakarīga komponente.

10.8 Atrodiet visus automorfismus katrai no koku izomorfisma klasēm ar 8 virsotnēm.

10.9 Kāds ir maksimālais virsotņu skaits kokam ar diametru d un maksimālo virsotnes pakāpi Δ?