DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

9.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt augstāku kārtu sakarīguma kritērijus.

Lekcijas kopsavilkums:

- var pētīt grafu sakarīguma īpašības.

Svarīgākie jēdzieni: virsotņu un šķautņu sakarīguma skaitlis, augstāku kārtu sakarīgums, šarnīri, tilti, bloki, bloku grafs, griezums, virsotņu šķirtas ķēdes, atdalošas kopas, stipri sakarīgi, vienpusīgi sakarīgi un vāji sakarīgi orientēti grafi, Herca grafs.

Svarīgākie fakti un metodes: sakarīguma īpašības, sakarīguma skaitļu īpašības, šarnīru īpašības, tiltu īpašības, Whitney kritērijs, Mengera teorēma.

1. Grafu sakarīgums

1.1. Pamatdefinīcijas

1.1.1. Parastais sakarījums

(Netukšs) grafs ir sakarīgs, ja tā jebkuras divas virsotnes var savienot ar ķēdi.

Grafa sakarīgās komponentes - maksimālie sakarīgie apakšgrafi.

1.1. teorēma.

1. Grafs ir sakarīgs $\iff$ $\exists$ virsotne, no kuras ir maršruts uz $\forall$ citu virsotni.
2. Grafs ir sakarīgs $\iff$ tā virsotnes var sakārtot virknē $(v_1, ..., v_n)$ tā, ka $\forall$ i inducētais grafs ar virsotņu kopu $\{v_1, ..., v_i\}$ ir sakarīgs.
3. Grafs ar n virsotnēm un mazāk kā $n - 1$ šķautni nav sakarīgs.
4. Ja grafs nav sakarīgs, tā papildgrafs ir sakarīgs (vai nu Γ vai $\overline{\Gamma}$ ir sakarīgs)

PIERĀDĪJUMS

1. Γ ir sakarīgs $\Longrightarrow$ no $\forall$ virsotnes $\exists$ ķēde uz $\forall$ citu.

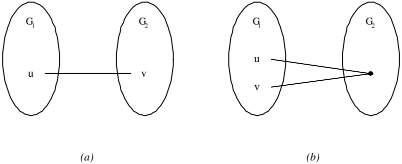
$\exists$ virsotne v, no kuras ir ķēde uz $\forall$ citu $\Longrightarrow$ starp jebkurām citām var konstruēt ķēdi caur v.

2. Indukcija ar parametru i. Jebkuru virsotni v_1 izvēlēsimies kā pirmo virsotni. Pieņemsim, ka inducētais apakšgrafs Γ_{i-1} ar virsotnēm $v_1, ..., v_{i-1}$ ir sakarīgs $\Longrightarrow$ $\exists$ virsotne v_i, kas ir saistīta ar Γ_{i-1} $\Longrightarrow$ inducētais apakšgrafs ar virsotņu kopu $\{v_1, ..., v_{i-1}, v_i\}$ arī ir sakarīgs.

3. Fiksēsim grafā kādu virsotni v. Ja grafs ir sakarīgs, tad eksistē ķēde no v līdz jebkurai no pārējām $n-1$ virsotnēm, tātad grafā ir vismaz $n-1$ šķautne.

4. Pieņemsim, ka grafs Γ nav sakarīgs. Tad tam eksistē vismaz divas komponentes Γ_1 un Γ_2. Mums ir jāpierāda, ka jebkuras divas virsotnes var savienot ar ķēdi papildgrafā $\overline{\Gamma}$.

Ja virsotnes pieder dažādām komponentēm, tad papildgrafā tās var savienot ar vienu šķautni vai, citiem vārdiem sakot, eksistē šīs virsotnes savienojošā ķēde ar garumu 1 (skatīt 3.13.(a) attēlā).



3.13. attēls. Ilustrācija pierādījumam

Ja abas virsotnes pieder vienai komponentei, tad tās papildgrafā var savienot ar divām šķautnēm un vienu virsotni citā komponentē, tātad eksistē šīs virsotnes savienojošā ķēde ar garumu 2 (skatīt 3.13.(b) attēlā). ■

1.2. teorēma.

1. Γ - nesakarīgs $\Longrightarrow$ $\delta(\Gamma) < \dfrac{|V|-1}{2}$.

2. Γ satur c komponentes $\Longrightarrow$ $|E| \leq \dfrac{(|V|-c+1)(|V|-c)}{2}$.

PIERĀDĪJUMS
1. Γ satur vismaz 2 komponentes Γ_1 un Γ_2, $|V(\Gamma_i)| = n_i$.

Apskatīsim 1 virsotni katrā komponentē $\Longrightarrow$

$$|V(\Gamma_i)| = n_i \geq \delta(\Gamma) + 1 \geq \frac{|V|-1}{2} + 1 = \frac{|V|+1}{2} \Longrightarrow$$

$$|V| \geq 2\frac{|V|+1}{2} = |V| + 1 = \text{pretruna}$$

2. Γ satur c komponentes Γ_1,...,Γ_c, $|V(\Gamma_i)| = n_i$.

$$|E| \leq \sum_{i=1}^{c} \frac{n_i(n_i-1)}{2}$$

$$\forall\ i\colon\ n_i \le |V| - (c-1) = |V| - c + 1 \implies$$
$$\frac{n_i(n_i-1)}{2} \le \frac{(|V|-c+1)(n_i-1)}{2} \implies$$
$$|E| \le \sum_{i=1}^{c} \frac{n_i(n_i-1)}{2} \le \frac{|V|-c+1}{2} \sum_{i=1}^{c} (n_i - 1) =$$
$$\frac{|V|-c+1}{2}\Big(|V|-c\Big) \blacksquare$$

1.1.2. Augstāku kārtu sakarīgums

Virsotņu sakarīgums

Neorientētu grafu Γ sauksim par *k-sakarīgu*, ja

1. $|V(\Gamma)| > k$;
2. $\Gamma - A$ ir sakarīgs grafs $\forall\ A \subseteq V(\Gamma)$, $|A| < k$, citiem vārdiem sakot, Γ nevar padarīt par nesakarīgu izdzēšot mazāk kā k virsotnes.

0-sakarīgie grafi - $\forall$ netukšie grafi.

1.1. piemērs. 1-sakarīgie grafi - netriviālie sakarīgie grafi. 2-sakarīgie grafi - sakarīgie grafi ar vismaz 2 virsotnēm, kurus var nevar padarīt par sakarīgiem, izdzēšot vienu virsotni.

Maksimālais naturālais k, tāds, ka grafs Γ ir k-sakarīgs - grafa Γ *virsotņu sakarīguma skaitlis*, $\kappa(\Gamma)$

Grafa k-sakarīgā komponente - maksimāls k-sakarīgs apakšgrafs.

Šķautņu sakarīgums

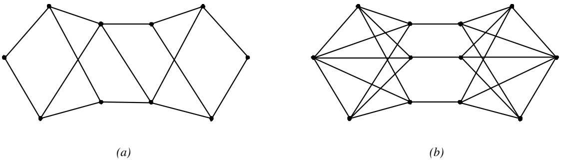
Neorientētu grafu Γ sauksim par *m-šķautņu sakarīgu*, ja

1. $|V(\Gamma)| > 1$;
2. $\Gamma - B$ ir sakarīgs grafs $\forall\ B \subseteq V(\Gamma)$, $|B| < m$, citiem vārdiem sakot, Γ nevar padarīt par nesakarīgu izdzēšot mazāk kā m šķautnes.

0-šķautņu sakarīgie grafi - $\forall$ netukšie grafi.

1.2. piemērs. 1-sķautņu sakarīgie grafi - netriviālie sakarīgie grafi. 2-šķautņu sakarīgie grafi - sakarīgie grafi ar vismaz 2 virsotnēm, kurus nevar var padarīt par sakarīgiem, izdzēšot vienu šķautni.

Maksimālais naturālais m, tāds, ka grafs Γ ir m-šķautņu sakarīgs - grafa Γ *šķautņu sakarīguma skaitlis*, $\lambda(\Gamma)$.



3.35. attēls. 2-sakarīga un 3-sakarīga grafa piemēri

1.3. teorēma. $|V(\Gamma)| > 1$. Tad

1. $\lambda(\Gamma) \leq \delta(\Gamma)$,
2. $\kappa(\Gamma) \leq \lambda(\Gamma)$.

PIERĀDĪJUMS

1. Lai atdalītu vienu virsotni, ir nepieciešamas vismaz $\delta(\Gamma)$ šķautnes.

2. Ir iespējams padarīt Γ par nesakarīgu izdzēšot λ šķautnes $\Longrightarrow$ ir iespējams padarīt Γ par nesakarīgu izdzēšot vienu virsotni katras šķautnes galā, tādu virsotņu skaits $\leq \lambda$. ■

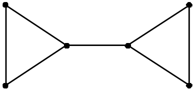
1.2. 1-sakarīgums

Virsotni sauksim par *šarnīru*, ja tās izdzēšana palielina grafa komponenšu skaitu.

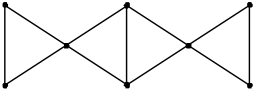
Ja grafam ir šarnīrs, tas ir tikai 1-sakarīgs un 0-sakarīgs.

Grafa inducētu apakšgrafu sauksim par *bloku*, ja tas ir maksimāls 2-sakarīgs apakšgrafs (jebkurš apakšgrafs, kas to satur, satur šarnīrus).

1.3. piemērs. 3.34.(a) attēlā ir parādīts grafs ar diviem šarnīriem un vienu tiltu. 3.34.(b) attēlā ir parādīts grafs ar trīs blokiem.



(a)



(b)

Grafa Γ *bloku grafs* - grafs, kur virsotnes ir grafa Γ bloki, divas virsotnes ir savienotas ar šķautni tad un tikai tad, ja attiecīgie bloki ir savienoti ar šarnīru. Grafa bloku grafs ir tā invariants.

Šķautni sauksim par *tiltu*, ja tās izdzēšana palielina grafa komponenšu skaitu.

Šķautņu kopas apakškopu sauksim par *griezumu*, ja tās izdzēšana palielina grafa komponenšu skaitu.

1.4. teorēma. Jebkurā sakarīgā grafā ar vismaz divām virsotnēm ir vismaz divas virsotnes, kas nav šarnīri.

PIERĀDĪJUMS Jebkuras diametrālas ķēdes gali nevar būt šarnīri.
■

1.5. teorēma. (Teorēma par šarnīriem) $\Gamma = (V, E)$ - sakarīgs grafs, $v \in \Gamma$. Zemāk dotie apgalvojumi ir ekvivalenti:

1) v ir šarnīrs;
2) eksistē divas virsotnes u un w, atšķirīgas no v, tādas, ka v pieder jebkurai (u, w)-ķēdei;
3) eksistē kopas $V \setminus \{v\}$ sadalījums divās apakškopās U un W, tāds, ka jebkurām virsotnēm $u \in U, w \in W$ virsotne v pieder jebkurai (u, w)-ķēdei.

PIERĀDĪJUMS Pierādījums tiek veikts ar cikla palīdzību. Patstāvīgs darbs vai diskusija. ■

1.6. teorēma. (Teorēma par tiltiem) $\Gamma = (V, E)$ - sakarīgs grafs, $e \in E$. Zemāk dotie apgalvojumi ir ekvivalenti:

1) e ir tilts;
2) e nepieder nekādam ciklam grafā Γ;
3) eksistē divas virsotnes u un w, tādas, ka e pieder jebkurai (u, w)-ķēdei;
4) eksistē kopas V sadalījums divās apakškopās U un W, tāds, ka jebkurām virsotnēm $u \in U, w \in W$ šķautne e pieder jebkurai (u, w)-ķēdei.

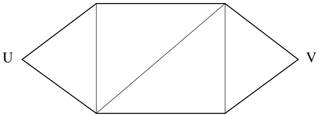
PIERĀDĪJUMS Pierādījums tiek veikts ar cikla palīdzību. Patstāvīgs darbs vai diskusija. ■

1.3. Augstāku kārtu sakarīgums

1.3.1. Virsotņu šķirtas ķēdes un atdalošās kopas

Γ - sakarīgs grafs, u un v - divas nesavienotas virsotnes. Divas (u,v)-ķēdes sauksim par *virsotņu šķirtām (neatkarīgām)*, ja tām nav kopīgu virsotņu, izņemot u un v.

Apzīmēsim maksimālo virsotņu šķirto (u,v)-ķēžu skaitu ar $p(u,v)$.



3.36. attēls. Piemērs grafam, kurā virsotnes u un v savieno divas virsotņu šķirtas ķēdes

Par *lokālās sakarības matricu (local connectivity matrix)* sauksim matricu, kuras rindas un kolonnas ir indeksētas ar virsotnēm un adresē

(i, j) ir maksimālais virsotņu šķirtu ķēžu skaits, kas savieno virsotnes i un j. Ja $i = j$, tad matricas elements nav definēts.

Teiksim, ka virsotņu kopa $S \subset V$ *atdala* virsotnes u un v, ja u un v pieder dažādām grafa $\Gamma - S$ komponentēm, šajā gadījumā kopu S sauksim par *atdalošo kopu* attiecībā uz dotajām virsotnēm u un v jeb par (u, v)-atdalošo kopu.

Apzīmēsim minimālo virsotnes u un v atdalošos virsotņu kopas elementu skaitu ar $c(u, v)$.

1.3.2. 2-sakarīgums - Whitney kritērijs

1.7. teorēma. (Whitney 2-sakarīguma kritērijs) Γ ir sakarīgs grafs ar vismaz 3 virsotnēm. Tad Γ ir 2-sakarīgs $\iff$ jebkurām divām virsotnēm u un v eksistē vismaz divas virsotņu šķirtas (u, v)-ķēdes.

PIERĀDĪJUMS

Ja katram virsotņu pārim $\{u, v\}$ eksistē vismaz divas virsotņu šķirtas (u, v)-ķēdes, tad Γ ir 2-sakarīgs.

Ja Γ nav 2-sakarīgs, tad tam eksistē šarnīrs. Seko, ka starp divām virsotnēm dažādās pusēs no šarnīra nevar eksistē divas virsotņu šķirtas ķēdes.

Ja Γ ir 2-sakarīgs, tad katram virsotņu pārim $\{u, v\}$ eksistē vismaz divas virsotņu šķirtas (u, v)-ķēdes.

Pierādīsim šo faktu ar indukciju ar parametru $dist(u, v)$.

Indukcijas bāze.

$dist(u, v) = 1 \implies u \sim v$. Šķautne (u, v) nevar būt tilts, jo Γ ir 2-sakarīgs. Seko, ka eksistē vēl viena (u, v)-ķēde, kas ir virsotņu šķirta attiecībā uz esošo ķēdi $(u, (u, v), v)$.

Indukcijas solis.

Pieņemsim, ka apgalvojums ir pierādīts visos gadījumos, kad

$$dist(u, v) < m$$

un pierādīsim, ka tad tas ir spēkā, ja $dist(u, v) = m$.

Fiksēsim jebkādu (u, v)-ķēdi P. Definēsim p kā iepriekšpēdējo virsotni šajā ķēdē, eksistē šķautne (p, v).

Divi svarīgi fakti:

- $dist(u, p) < m \implies$ saskaņā ar indukcijas hipotēzi eksistē 2 virsotu šķirtas (u, p)-ķēdes P_1 un P_2,
- Γ ir 2-sakarīgs $\implies \exists$ (u, v)-ķēde Q, kas nesatur p, jo pretējā gadījumā p būtu šarnīrs.

Ir iespējami 2 gadījumi:

A. ķēdei Q nav kopīgu starpvirsotņu ar P_1 un P_2;

B. ķēdei Q ir kopīga starpvirsotne ar P_1 vai P_2.

Gadījums A. Jebkura no ķēdēm $P_1 + (p, v)$ vai $P_2 + (p, v)$ kopā ar Q veido virsotņu šķirtu ķēžu pāri;

Gadījums B. Pieņemsim, ka pirmā virsotne ķēdē Q, kas krusto kādu no ķēdēm P_1 vai P_2, ir q un pieder P_1. Apzīmēsim ar R ķēdi, kas iet no v pa Q līdz q, un tad iet pa P_1 līdz u. Redzam, ka R un $P_2 + (p, v)$ ir virsotņu šķirtas. ■

1.3.3. Mengera teorēma

1.8. teorēma. (Mengera teorēma). u un v ir nesavienotas virsotnes grafā. Minimālās (u, v)-atdalošas kopas elementu skaits ir vienāds ar maksimālu virsotņu šķirto (u, v)-ķēžu skaitu:

$$p(u, v) = c(u, v).$$

PIERĀDĪJUMS Izmantosim matemātisko indukciju ar parametru $|E(\Gamma)|$.

Apzīmēsim $k = c_\Gamma(u, v)$.

$p_\Gamma(u, v) \leq k$, jo $\forall$ virsotņu šķirta (u, v)-ķēžu kopa kopa P šķeļas ar $\forall$ (u, v)-atdalošu virsotņu kopu ne vairāk kā $|P|$ virsotnēs.

Atliek pierādīt, ka $p_\Gamma(u, v) \geq k$.

Pieņemsim, ka $\exists$ šķautne, kas nav incidenta ne ar u, ne ar v. Pretējā gadījumā apgalvojums ir triviāls.

Indukcijas bāze

Ja šķautņu skaits ir mazs, tad apgalvojumu viegli pārbaudīt.

Indukcijas solis

Pieņemsim, ka apgalvojums ir pierādīts visiem grafiem ar šķautņu skaitu, kas ir mazāks nekā dotajam grafam, un pierādīsim, ka apgalvojums ir patiess arī ar doto šķautņu skaitu.

Pieņemsim, ka $e = (x, y)$ ir šķautne, kas nav incidenta ne ar u, nw ar v. Definēsim $\Delta = \Gamma - e$.

Seko, ka:

- $p_\Gamma(u, v) \geq p_\Delta(u, x)$ (apakšgrafs),
- $p_\Delta(u, v) = c_\Delta(u, v)$ (indukcijas pieņēmums) un
- $c_\Gamma(u, v) \leq c_\Delta(u, v) + 1$ ($\forall$ (u, v)-atdalošā kopā grafā Δ un viens no e galiem ir (u, v)-atdalošā kopa grafā Γ).

Seko, ka

$$p_\Gamma(u, v) \geq p_\Delta(u, v) = c_\Delta(u, v) \geq c_\Gamma(u, v) - 1 = k - 1$$

Varam uzskatīt, ka $p_\Gamma(u, v) = k - 1$, savādāk viss ir pierādīts ($p_\Gamma(u, v) \geq k$). Tātad $c_\Delta(u, v) = k - 1$.

Atradīsim minimālu kopu S, kas atdala u un v grafā Δ: $S = \{s_1, ..., s_{k-1}\}$. Apzīmēsim ar U virsotņu kopu, kas ir sasniedzama no u grafā $\Delta - S$, apzīmēsim ar V virsotņu kopu, kas ir sasniedzama no v grafā $\Delta - S$.

$|S| = k - 1 \implies S$ nav (u, v)-atdalošа kopa grafā $\Gamma \implies \exists$ (u, v)-ķēde grafā $\Gamma - S$, kas satur e. Var uzskatīt, ka $x \in U$ un $y \in V$.

Saspiedīsim V uz vienu virsotni v, iegūsim grafu $\Gamma \backslash V$. Var redzēt, ka $S \cup x$ ir (u, v)-atdalоšа kopa grafā $\Gamma \backslash V$. Saskaņā ar indukcijas pieņēmumu eksistē k virsotņu šķirtas ķēdes $a_1, ..., a_k$.

Saspiedīsim U uz vienu virsotni u, iegūsim grafu $\Gamma \backslash U$. Var redzēt, ka $S \cup y$ ir (u, v)-atdalоšа kopa grafā $\Gamma \backslash U$. Saskaņā ar indukcijas pieņēmumu eksistē k virsotņu šķirtas ķēdes $b_{1,...,b_k}$.

Kombinējot ķēdes $a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_k$ un šķautni e, iegūsim k virsotņu šķirtas (u, v)-ķēdes grafā Γ. $\blacksquare$

Analizējot Mengera teorēmu, iegūsim grafa augstāku kārtu sakarīguma īpašību (Whitney kritērija vispārinājumu).

1.9. teorēma.

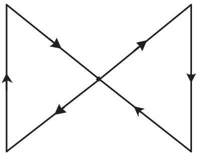
1. Grafs ir k-sakarīgs $\iff$ jebkurām divām virsotnēm eksistē k virsotņu šķirtas ķēdes.
2. Grafs ir k-šķautņu sakarīgs $\iff$ jebkurām divām virsotnēm eksistē k šķautņu šķirtas ķēdes.

PIERĀDĪJUMS

1. Grafs Γ satur k-virsotņu sķirtas ķēdes starp $\forall$ virsotnēm u un v $\Longrightarrow$ $|V(\Gamma)| > k$ un Γ nevar padarīt par nesakarīgu izdzēšot mazāk kā k virsotnes $\Longrightarrow$ Γ ir k-sakarīgs.

Γ ir k-sakarīgs $\Longrightarrow$ $\forall$ virsotnēm u un v minimālā atdalošā virsotņu kopa satur vismaz k elementus $\Longrightarrow$ $\exists$ vismaz k virsotņu šķirtas (u, v)-ķēdes.

2. Patstāvīgi. ■



3.37. attēls. Stipri sakarīga grafa piemērs

1.4. Sakarīgums orientētos grafos

$\Gamma = (V, E)$ - orientēts grafs.

Virsotnes v un w - *stipri sakarīgas*, ja eksistē virzītas ķēdes, kas saista v un w (abos virzienos).

Orientēts grafs - stipri sakarīgs, ja jebkuras divas virsotnes ir stipri sakarīgas.

Orientētu grafu sauksim par *vāji sakarīgu (sakarīgu)*, ja tam atbilstošais neorientētais grafs ir sakarīgs.

Par orientēta grafa *stipri sakarīgu komponenti* sauksim maksimālu stipri sakarīgu apakšgrafu.

Par orientēta grafa *vājās sakarības komponentēm* sauksim sakarības komponentes grafā, ko iegūst no dotā orientētā grafa, aizmirstot par šķautņu orientāciju.

Par orientēta grafa $\Gamma = (V, E)$ *kondensāciju (Herca grafu)* sauksim grafu

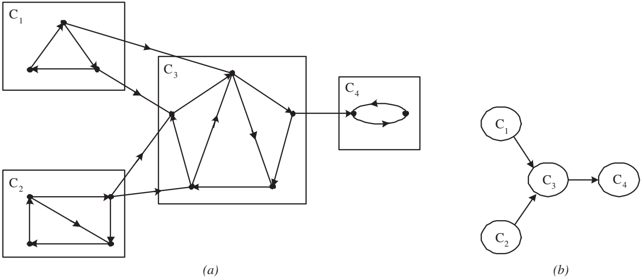
$$H(\Gamma) = (H(V), H(E)),$$

ko iegūst, savelkot uz vienu virsotni katru stipri sakarīgo komponenti.

Citiem vārdiem sakot:

- $H(V)$ ir visu stipri sakarīgo komponenšu kopa,
- $\exists$ šķautne $h_1 \to h_2 \iff \exists$ šķautne no vismaz vienas virsotnes h_1 komponentē uz vismaz vienu virsotni h_2 komponentē.

Orientēta grafa kondensācija ir tā invariants.



3.40. attēls. Orientēta grafa (a) un tā kondensācijas (b) piemērs

2. 9.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

9.1 Kāds var būt maksimāli iespējamais šarnīru skaits grafam ar n virsotnēm?

9.2 Konstruēt 3-regulāru grafu, kuram virsotņu sakarīgums ir vienāds ar 1.

9.3 Pierādīt, ka grafa šarnīrs nevar būt šarnīrs tā papildgrafam.

9.4 Atrast virsotņu un šķautņu sakarīguma skaitļus šādiem grafiem:

(a) ķēdei P_n,
(b) ciklam C_n,
(c) pilnajam grafam K_n,
(d) oktaedra grafam,
(e) Petersena grafam.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

9.5 Pierādīt, ka katru neorientētu sakarīgu grafu, kuram katras virsotnes pakāpe ir pāra skaitlis, var orientēt tā, lai tam būtu viena stipri sakarīga komponente.