DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

2.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- iegūt priekšstatu par klasiskiem kombinatorikas uzdevumiem.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt vairākus vienkāršus kombinatorikas uzdevumus, kurus var pētīt izmantojot elementāras skaitīšanas metodes.

Svarīgākie jēdzieni: virkņu ar atkārtojumiem, virkņu bez atkārtojumiem un apakškopu skaitīšanas formulas, kombinācijas ar atkārtojumiem, cikliskas virknes.

Svarīgākie fakti un metodes: formulas un citas sakarības definētajiem kombinatoriskajiem skaitļiem.

1. Klasiski kombinatorikas uzdevumi

1.1. Trīs vienkāršākie kombinatorikas uzdevumi

Daži kombinatorikas uzdevumi tiek bieži izmantoti kā apakšuzdevumi citos, sarežģītākos, uzdevumos, tāpēc tos mēs apskatīsim atsevišķi šajā nodaļā.

1.1.1. Virknes ar atkārtojumiem

Cik veidos var konstruēt m vienības garas virknes, kurās var būt n dažādu tipu elementi, kas var atkārtoties (n-multikopas elementi)? Šī uzdevuma atrisinājumu apzīmēsim ar $\overline{A}_n^m$.

Lai atrisinātu šo uzdevumu, izmantosim reizināšanas likumu.
Veidosim šādas virknes, sākot no kreisās malas:

1. Virknes pirmo elementu var izvēlēties n veidos,
2. virknes otro elementu neatkarīgi no pirmā var izvēlēties n veidos, tātad pirmos divus virknes elementus var izvēlēties $n \times n = n^2$

veidos,

... ...,

3. virknes k-to elementu neatkarīgi no visiem iepriekšējiem var izvēlēties n veidos, tātad pirmos k virknes elementus var izvēlēties $\underbrace{n \cdot ... \cdot n}_{k \text{ reizes}}$ veidos,

... ...

Visus virknes m elementus var izvēlēties n^m veidos:

$$\overline{A}_n^m = \underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{m \text{ reizes}} = n^m.$$

1.1. piemērs. Cik dažādos veidos var izvēlēties piecciparu tālruņa numuru? Katru no pieciem cipariem var neatkarīgi izvēlēties 10 veidos, cipari var atkārtoties, tāpēc atbilde ir vienāda ar $\overline{A}_{10}^5 = 10^5$.

$\overline{A}_n^m$ kā funkciju skaits

Uzdot funkciju no m elementu kopas A uz n elementu kopu B ir tas pats, kas uzdot sakārtotu virkni: funkciju $f : A \to B$ viennozīmīgi uzdot ar virkni

$$\underbrace{(f(a_1), ..., f(a_m))}_{m \text{ elementi}},$$

kuras elementi ir kopas B elementi. Otrādi, katrai m elementus garai virknei, kuras elementi pieder kopai B, var viennozīmīgi piekārtot atbilstošo funkciju. Tādējādi ir nodibināta bijektīva atbilstība starp virknēm un funkcijām.

1.1. piezīme. $\overline{A}_2^m$ var interpretēt arī kā visu m elementu lielas kopas apakškopu skaitu, jo katru apakškopu var uzdot kā funkciju no šādas kopas uz divu elementu kopu $0, 1$, kas elementam piekārto 1, ja tas pieder apakškopai, un 0, ja nepieder. Tādējādi m elementu lielas kopas visu apakškopu skaits ir vienāds ar 2^m.

1.1.2. Virknes bez atkārtojumiem

Cik ir dažādu m vienības garu virkņu, kurās var būt dotās n elementus lielas kopas elementi? šo skaitli apzīmēsim ar A_n^m.

Atšķirībā no iepriekšējā uzdevuma elementi virknē nevar atkārtoties, jo tie tiek izvēlēti no kopas.

Arī šajā gadījumā izmantosim reizināšanas likumu. Skaitīšanu veiksim, konstruējot visas iespējamās virknes. Konstruēsim virknes, pievienojot jaunus elementus labajā malā:

1. Virknes 1.elementu (sākot no kreisās puses) var izvēlēties n veidos,
2. virknes 2.elementu (ja 1.elements jau ir izvēlēts) var izvēlēties neatkarīgi no pirmā $n-1$ veidā, tātad pirmos divus virknes elementus var izvēlēties $n(n-1)$ dažādos veidos,

... ...

k. virknes k-to elementu (ja iepriekšējie $k-1$ elementi ir izvēlēti) var izvēlēties $n-k+1$ veidos, tātad pirmos k elementus var izvēlēties $\underbrace{n(n-1)...(n-k+1)}_{k \text{ reizinātāji}}$.

Pabeidzot šo spriedumu, iegūstam, ka kopējais dažādu virkņu skaits ir $n(n-1)...(n-m+1)$, tātad

$$A_n^m = n(n-1)\cdot ... \cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Svarīgs speciālgadījums ir $A_n^n = n!$ (n elementus lielu kopu var sakārtot $n!$ veidos). A_n^n apzīmēsim ar P_n un sauksim par n elementus lielas kopas *permutāciju* skaitu.

1.2. piemērs. Cik dažādos veidos var nostādīt ierindā piecus cilvēkus no desmit cilvēku lielas grupas? Atbilde: $A_{10}^5 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 30240$.

A_n^m kā injektīvu funkciju skaits

A_n^m ir vienāds ar injektīvu funkciju skaitu no m elementu lielas kopas uz n elementus lielu kopu tāpēc, ka injektīvas funkcijas uzdošana ir ekvivalenta virknes bez atkārtojumiem uzdošanai. To var interpretēt arī kā dažādu objektu ievietošanu dažādās kastēs.

1.1.3. Apakškopas

Cik ir dažādu m elementus lielu apakškopu kopā, kas satur n elementus? Šo skaitli apzīmēsim ar C_n^m vai $\binom{n}{m}$.

Atradīsim C_n^m, izmantojot dalīšanas likumu.

Saskaņā ar spriedumu, ar kura palīdzību mēs aprēķinājām A_n^m -

- katru m elementus lielu apakškopu var sakārtot $m!$ veidos,
- tātad vienai m elementus lielai apakškopai atbilst $m!$ sakārtotas virknes.

$$\Longrightarrow\ A_n^m = C_n^m m! \ \Longrightarrow\ C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

1.3. piemērs. Cik dažādos veidos var izvēlēties piecus cilvēkus no desmit cilvēku lielas grupas? Atbilde ir vienāda ar

$$C_{10}^{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252.$$

1.2. piezīme. Skaitļiem C_n^m ir vēl vairākas lietderīgas interpretācijas:

- C_n^m var interpretēt kā n vienības garu bināru virkņu skaitu, kurās ir m vieninieki, jo katrai n elementus lielas kopas m-apakškopai var viennozīmīgi piekārtot tās bitu vektoru,
- C_n^m var interpretēt kā fiksēta garuma augošu (dilstošu) virkņu skaitu pilnīgi sakārtotā kopā: katru m-apakškopu n elementus lielā pilnīgi sakārtotā kopā var sakārtot augošā vai dilstošā kārtībā tieši vienā veidā, otrādi, katrai augošai vai dilstošai virknei var viennozīmigi piekārtot atbilstošo apakškopu,
- C_n^m var interpretēt kā koeficientus, ko iegūst, atverot iekavas izteiksmē $(a+b)^n$.

Pārskaitīsim dažas vienkāršākās skaitļu C_n^m īpašības:

1) $C_n^0 = 1,\ C_n^1 = n,\ C_n^n = 1;$

2) $C_n^m = C_n^{n-m};$

3) $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$(Paskāla trijstūra īpašība).

1.2. Uzdevumi, kas ir reducējami uz kombinācijām vai variācijām

1.2.1. Kombinācijas ar atkārtojumiem

Atkārtot par multikopām.

Cik ir dažādu m elementus lielu apakšmultikopu multikopā, kas satur n dažādu tipu elementus neierobežotā skaitā (n-multikopa)?

Kopu valodā: cik veidos no n elementu lielas kopas var izvēlēties m elementus lielu apakškopu, kurā elementi var atkārtoties. Šo skaitli apzīmēsim ar $\overline{C}_n^m$.

Atrisināsim šo uzdevumu ar bijekcijas metodi - piekārtosim savstarpēji viennozīmīgi katrai apakšmultikopai noteikta veida bināru virkni.

Katrai apakšmultikopai ar dotajām īpašībām piekārtosim bināru virkni šādā veidā:

1) sanumurēsim n-multikopas elementu tipus ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz n;

2) pieņemsim, ka apakšmultikopā ir r_i elementi, kuru tips ir i $(\sum_{i=1}^{n} r_i = m)$,
   sākot no kreisās puses rakstīsim
   - r_1 nulles un 1 vieninieku,
   - r_2 nulles un 1 vieninieku,
   - ...,
   - r_n nulles un 1 vieninieku,

   (piemēram, ja elementu tipi ir $\{1, 2, 3\}$, tad apakšmultikopai $\{1, 1, 1, 2, 2, 3\}$ atbilst bināra virkne $(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$);

3) pēdējo vieninieku nodzēsīsim (jo tas nedod informāciju).

Iegūsim viennozīmīgi definētu virkni, kurā ir m nulles un $n-1$ vieninieks.

Otrādi, katrai šādai virknei atbilst viena vienīga apakšmultikopa ar dotajām īpašībām.

Tātad meklējamais multikopu skaits $\overline{C}_n^m$ ir vienāds ar tādu bināru virkņu skaitu, kuras satur m nulles un $n-1$ vieninieku:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^m.$$

1.4. piemērs. Veikalā ir 5 dažādu veidu markas neierobežotā skaitā. Cik dažādos veidos var iegādāties 10 marku komplektu? Redzam, ka mums ir jāatrod 10 elementus lielu apakšmultikopu skaits multikopā, kas satur 5 tipu elementus. Atbilde ir vienāda ar $\bar{C}_5^{10} = C_{14}^4 = 1001$.

1.2.2. Apakškopu virkņu skaits

Cik veidos kopu, kas satur n elementus, var sadalīt k apakškopu virknē tā, ka i-tā apakškopa satur m_i elementus, kur $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$, šo skaitli apzīmēsim ar $C_n^{m_1,m_2,\ldots,m_k}$ vai $P_n(m_1, m_2, ..., m_k)$.

1. Pirmo apakškopu var izvēlēties $C_n^{m_1}$ veidos,
2. otro apakškopu, ja pirmā ir izvēlēta, var izvēlēties $C_{n-m_1}^{m_2}$ veidos,
3. trešo var izvēlēties $C_{n-m_1-m_2}^{m_3}$ veidos u.t.t.

Iegūstam, ka

$$C_n^{m_1,m_2,\ldots,m_k} = C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} C_{n-m_1-m_2}^{m_3} ... C_{n-m_1-\ldots-m_{k-1}}^{m_k}.$$

Pēc pārveidojumiem iegūstam, ka

$$C_n^{m_1,m_2,\ldots,m_k} = \frac{n!}{m_1!m_2!...m_k!}.$$

$C_n^{m_1,m_2,\ldots,m_k}$ var interpretēt kā multikopas $\{\{m_1 \cdot 1, m_2 \cdot 2, ..., m_k \cdot k\}\}$ n elementu garu virkņu skaitu:

- elementa 1 vietas var izvēlēties $C_n^{m_1}$ veidos,
- elementa 2 vietas var izvēlēties $C_{n-m_1}^{m_2}$ veidos,
- ...

1.2.3. Kopas sadalījums apakškopās ar noteiktu elementu skaitu

Cik veidos kopu, kas satur n elementus, var sadalīt šķirtās apakškopās tā, ka katram $i : 0 \leq i \leq n$ ir tieši m_i apakškopas, kas satur i elementus, tādējādi izpildās nosacījums

$$1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + ... + n \cdot m_n = n,$$

šo skaitli apzīmēsim ar $S_n^{m_1,m_2,\dots,m_n}$.

No sākuma atradīsim noteikta veida apakškopu virkņu skaitu tā, lai tiktu izpildīts to elementu summas nosacījums.

Konstruējot šādu apakškopu virkni, sākot ar mazāka elementu skaita apakškopām, iegūstam, ka apakškopu virkņu skaits, kuru mēs apzīmēsim ar $R_n^{m_1,m_2,\ldots,m_n}$, ir vienāds ar

$$\underbrace{C_n^1 \cdot C_{n-1}^1 \cdot \ldots \cdot C_{n-1m_1+1}^1}_{m_1} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{C_{n-1m_1}^2 \cdot C_{n-1m_1-2}^2 \cdot \ldots \cdot C_{n-1m_1-2m_2+2}^2}_{m_2} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{C_{n-1m_1-2m_2}^3 \cdot \ldots \cdot C_{n-1m_1-2m_2-3m_3+3}^3}_{m_3} \cdot \ldots$$

Vienkāršosim $R_n^{m_1,m_2,\ldots,m_n}$:

$$R_n^{m_1,m_2,\ldots,m_n} = \frac{n!}{1!(n-1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{1!(n-2)!} \cdot \ldots$$

$$\cdot \frac{(n-1m_1+1)!}{1!(n-1m_1)!} \cdot \frac{(n-1m_1)!}{2!(n-1m_1-2)!} \cdot \ldots =$$

$$= \frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\ldots(n!)^{m_n}}$$

Lai atrastu nesakārtotu šādu sadalījumu skaitu, ievērosim, ka katram i apakškopas, kas satur i elementus, var sakārtot $m_i!$ veidos neatkarīgi no citu elementu skaita apakškopām, tātad saskaņā ar dalīšanas likumu

$$S_n^{m_1,m_2,\dots,m_n} = \frac{R_n^{m_1,m_2,\dots,m_n}}{m_1!m_2!\dots m_n!} = \frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\dots(n!)^{m_n}m_1!m_2!\dots m_n!}.$$

1.2.4. Cikliskas virknes

Cik veidos n elementus lielu kopu var izvietot ciklā (ap riņķa līniju), ja ir fiksēts cikla apiešanas virziens?

Šis uzdevums atšķiras no uzdevuma par A_n^m ar to, ka katram ciklam var piekārtot vairākas virknes atkarībā no tā, no kuras vietas šo ciklu sāk lasīt.

Katrai n elementus garai virknei atbilst n cikli, tāpēc, izmantojot dalīšanas likumu, iegūstam, ka ciklu skaits ir vienāds ar

$$\frac{A_n^n}{n} = (n-1)!$$

1.2.5. Vienādojuma $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$ atrisinājumi veselos skaitļos

Šim uzdevumam var būt dažādas variācijas:

- *nenegatīvu atrisinājumu skaits* - katram šādam atrisinājumam atbilst n-multikopas m-apakšmultikopa, tātad kopējais variantu skaits ir vienāds ar
$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m;$$
- *pozitīvu atrisinājumu skaits* - katram šādam atrisinājumam atbilst nenegatīvs atrisinājums vienādojumam
$$x_1 + x_2 + ... + x_n = m - n,$$
tātad variantu skaits ir vienāds ar
$$\overline{C}_n^{m-n} = C_{m-1}^{m-n} = C_{m-1}^{n-1}.$$

2. 2.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

2.1 Ribonukleīnskābes (RNS) tipa molekulas var saturēt 4 tipu elementārās sastāvdaļas, kuras apzīmēsim ar A,C,G,T. Elementārās sastāvdaļas tiek izvietotas virknē. Cik eksistē

(a) RNS virkņu ar garumu 8, kurās ir 3 C un 5 A elementi?

(b) RNS virkņu ar garumu 12, kurās ir 4 C un 4 A elementi?

2.2 Cik veidos n zēnus un n meitenes var sasēdināt ap apaļu galdu tā, lai nekur blakus nesēdētu 2 zēni vai 2 meitenes.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi