DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

1.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- iegūt priekštatu par kombinatorikas disciplīnu un apgūt elementārās skaitīšanas metodes.

Lekcijas kopsavilkums:

- diskrētu objektu skaitīšanas uzdevumu var sadalīt vienkāršākos soļos,
- ir vairākas elementāras skaitīšanas metodes un uzdevumi, uz kuriem balstās kombinatorika.

Svarīgākie jēdzieni: diskrētā matemātika, kombinatorika, skaitāmo objektu kodēšana, skaitošā funkcija, veidotājfunkcija.

Svarīgākie fakti un metodes: rekursijas likums, summas likums, reizināšanas likums, dalīšanas likums, vienlieluma likums, skaitīšana izmantojot papildinājumu, skaitīšana divos dažādos veidos, Dirihlē princips.

1. Diskrētā matemātika un tās apakšnozares

1.1. Definīcija

Diskrētā matemātika (galīgā matemātika, finite mathematics) ir matemātikas apakšnozare, kas pēta matemātiskus objektus, kas pēc savas dabas ir diskrēti. Diskrētajā matemātikā nav nepieciešami tādi jēdzieni kā robeža un nepārtrauktība.

Diskrētajā matemātikā pētāmo objektu piemēri:

- veselie skaitļi,
- kopas (dažādu objektu sakopojumi),
- grafi,
- diskrēti ģeometriski objekti,
- formālās valodas.

Klasiskā(nepārtrauktā) matemātika visbiežāk nodarbojas ar "gludiem", nepārtrauktiem objektiem, piemēram, reāliem skaitļim, ģeometriskām figūrām un nepārtrauktām funkcijām.

Nepārtrauktā un diskrētā matemātika savā starpā ir saistītas. Piemēram, nepārtrauktas funkcijas maksimumu kopa var būt diskrēta.

1.2. Diskrētās matemātikas apakšnozares

Mūsdienās diskrētā matemātika sastāv no šādām apakšnozarēm:

- loģika (mācība par pareizu secinājumu veikšanu),
- kopu, attēlojumu un attiecību teorija,
- veselo skaitļu teorijas daļa,
- kombinatorika (pārskaitošā kombinatorika, dizainu teorija),
- grafu teorija,
- algoritmu teorija (mācība par algoritmiem jeb aprēķinu metodēm),

- informācijas teorija,
- diskrētā ğeometrija,
- aprēķināmības un kompleksitātes teorija (mācība par skaitļošanas un algoritmu teorētiskajiem un praktiskajiem ierobežojumiem),
- diskrētā varbūtību teorija.

Diskrētās matemātikas nodaļas, kas tiks apskatītas šajā kursā:

- kombinatorika,
- grafu teorija.

2. Kombinatorikas pamati

2.1. Ievads

Kombinatorika (no latīņu valodas saknes ar nozīmi "apvienošana") - matemātikas nozare, kas nodarbojas ar saliktu diskrētas dabas objektu (kopu elementu, apakškopu, virkņu u.c.)

- kvantitatīvu analīzi, klasifikāciju un it sevišķi skaitīšanu,
- vispārīgām skaitīšanas metodēm un likumsakarībām.

Matemātikā skaitīšanu parasti saprot kā empīriskā, fizikālā skaitīšanas procesa paātrināšanu ar matemātiskām metodēm -

- relatīvi ātri aprēķināmu formulu vai
- ātrākas darbības algoritmu iegūšanu.

Tipisks kombinatorikas uzdevums ir skaitīt noteikta veida objektus, kas tiek kvantitatīvi raksturoti ar vienu vai varākiem parametriem, kas ir veseli skaitļi.

Šādā gadījumā atbilde ir vairāk vai mazāk izsmeļoša informācija par objektu skaitu -

- slēgta formula elementāras funkcijas veidā,
- aprēķināšanas formula galīgas summas vai reizinājuma veidā,
- asimptotiska formula,
- objektu skaita aprēķināšanas algoritms,
- matemātiskās īpašības u.c.

Par kombinatorikas sastāvdaļu uzskata arī

- diskrētās matemātikas formulu vienkāršošanu,
- speciāla veida diskrētu objektu analīzi, konstruēšanu vai eksistences pierādīšanu,
- diskrētu objektu konstruēšanu ar optimālām īpašībām,
- skaitīšanas rezultātu izmantošanu matemātisku izteikumu pierādījumos.

Kombinatorikas pirmsākumi ir meklējami seno laiku un agro viduslaiku matemātiķu darbos, bet arī mūsdienās kombinatorika ir aktīvas pētnieciskas darbības arēna ar daudzām interesantām neatrisinātām problēmām.

Dažos pēdējos gadu desmitos kombinatorika tiek plaši pielietota bioloģijā.

2.1. piemērs. Ir dots veselu skaitļu masīvs $(a_1, ..., a_{1000})$. Risinot kādu uzdevumu, algoritmā tiek pieprasīts apskatīt visus iespējamos sakārtotos pārus (a_i, a_j). Cik laika tam ir nepieciešams, ja viena pāra apstrādāšana aizņem 1 sekundi? Cik atmiņas būs vajadzīgs visu pāru saglabāšanai, ja katrs skaitlis aizņem 1 baitu?

2.2. Kombinatorikas pamatprincipi

2.2.1. Skaitāmo objektu kodēšana

Jebkura kombinatorikas uzdevuma risināšana sastāv no diviem svarīgiem soļiem:

1) skaitāmo objektu uzdošanas (kodēšanas, parametrizēšanas) ērtos matemātiskos terminos;
2) kombinatorikas metožu pielietošanas uzdevuma atrisināšanai.

Parasti kombinatorikas objekti var tikt uzdoti vienkāršos diskrētās vai nepārtrauktās matemātikas terminos kā

- virknes fiksētā alfabētā,
- apakškopas ar noteiktām īpašībām fiksētā kopā.
- funkcijas (piemēram, permutācijas),
- grafi,
- grafu apakštruktūras (piemēram, maršruti vai cikli).

Pareiza skaitāmo objektu kodēšana ir svarīgs un bieži vien pat kritisks solis uzdevuma atrisināšanā. Pētāmo objektu kodēšana var tikt veikta dažādos veidos, lai atrisinātu uzdevumu, ir jāizvēlas pietiekoši ērts kodēšanas veids.

2.2. piemērs. Bināru virkni var interpretēt kā vismaz 2 dažādu objektu kodu.

- **Apakškopa**. To var interpretēt kā apakškopas bitu vektoru.
- **Trajektorija**. Ja ir dots maršruts plaknē no punkta $(0, 0)$ līdz punktam (m, n) ar atļautiem soļiem $x = (1, 0)$ un $y = (0, 1)$ veidā $s_1 ... s_{m+n}$, tad piekārtosim tam bināru virkni $(z_1, ..., z_{m+n})$, kur $z_i = 1$, ja $s_i = x$ un $z_i = 0$, ja $s_i = y$.

2.2.2. Skaitāmo lielumu un skaitīšanas rezultātu parametrizēšana

Skaitāmie objekti parasti ir atkarīgi no viena vai vairākiem diskrētiem parametriem, kas pieņem vērtības sanumurējamā kopā.

Tādējādi kombinatorikā tiek pētītas veselas objektu saimes un to *skaitošās funkcijas*, kas ir atkarīgas no šos objektus raksturojošiem parametriem.

2.3. piemērs. $f(n)$ - virkņu ar garumu n skaits.

Kombinatorikas uzdevumi var būt saistīti gan ar tādu objektu skaitīšanu, kuru sastāvdaļas - *atomi* tiek kodētas kā "iezīmētas", gan arī ar objektiem, kuru sastāvdaļas nav atšķiramas - "neiezīmētas".

2.2.3. Veidotājfunkcijas

Kombinatoriska uzdevuma skaitošajai virknei $\{f(n)\}_{n \geq n_0}$ var piekārtot kādu citu objektu F, kas saturētu visu informāciju par virkni integrētā veidā. Nereti objektu F ir vieglāk atrast nekā virknes elementus $f(n) = f_n$.

Plaši izplatīta kombinatorikas metode, kurā ir realizēta šī ideja, ir *veidotājfunkciju metode*:

- izmantojot informāciju par skaitošo virkni, tai tiek piekārtota funkciju rinda, kuru bieži var identificēt ar elementāru funkciju,
- tiek pētīta šī jaunizveidotā funkciju rinda - *veidotājfunkcija* un secinājumi tiek attiecināti uz virknes locekļiem.

Veidotājfunkciju pētīšana parasti ir saistīta ar algebras un matemātiskās analīzes tehnikas pielietošanu, un virknes locekļu atrašana tiek reducēta uz algebrisku vienādojumu vai diferenciālvienādojumu risināšanu.

Ja ir dota skaitļu virkne $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ (piemēram, kādas diskrētu objektu klases $\{\mathcal{A}_n\}$ *skaitošā funkcija*), tad

- formālu pakāpju rindu $A(x) = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$ sauksim par virknei atbilstošo *veidotājfunkciju*
- formālu pakāpju rindu $A_{exp}(x) = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ sauksim par virknes *eksponenciālo veidotājfunkciju*.

Kombinatorikas uzdevumu risināšana, izmantojot veidotājfunkcijas, parasti notiek pēc šāda algoritma:

1) uzdevuma nosacījumi tiek pārveidoti nosacījumos, kurus apmierina veidotājfunkcijas;
2) tiek atrastas veidotājfunkcijas vai izdarīti iespējamie secinājumi par to dabu;
3) izmantojot Teilora rindu teoriju, tiek atrasti veidotājfunkciju koeficienti.

Var redzēt, ka veidotājfunkcija $A(x)$ var tikt interpretēta kā Teilora rinda punkta $x = 0$ apkārtnē. Ja ir iespējams, veidotājfunkciju ir jāmēğina pierakstīt elementāras funkcijas veidā.

Atgādināsim, ka, ja $f(x)$ ir bezgalīgi daudzas reizes atvasināma funkcija un kādā punkta $x = 0$ apkārtnē var tikt izvirzīta pakāpju rindā

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \implies a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Izmantojot Teilora rindu teoriju virknes veidotājfunkciju var identificēt ar tās kompakto pierakstu elementāras funkcijas veidā.

2.4. piemērs. Virknes $(1, 1, 1, 1, ...)$ veidotājfunkcija ir

$$A(x) = 1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}.$$

2.3. Elementārās skaitīšanas metodes

2.3.1. Rekursijas (skaldi un valdi!) likums

Risinot kombinatorikas uzdevumus, ir lietderīgi sadalīt skaitāmos objektus mazākās daļās, atkārtojot šo soli vairākas reizes, kamēr skaitīšanas uzdevums kļūst ļoti vienkāršs.

Skaitāmo objektu dalīšana mazākās daļās var tikt veikta dažādos veidos:

- sadalot objektu daļās pēc to strukturālām īpašībām;

- atmetot vienu simbolu virknes galā vai kādā noteiktā vietā, ja skaitāmie objekti ir iekodēti kā virknes (*izdalītā elementa metode*)

Plaši izplatīts šī principa pielietošanas piemērs ir *rekurento sakarību metode* - skaitošās virknes elementu izsakām kā funkciju no iepriekšējiem elementiem:

$$f(n) = R(f(n-1), f(n-2), ...).$$

2.3.2. Summas likums

Ja $A = A_1 \cup A_2$ *un* $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, *tad*

$$\underbrace{|A|}_{\text{grūti}} = \underbrace{|A_1|}_{\text{viegli}} + \underbrace{|A_2|}_{\text{viegli}}.$$

Šo likumu izmanto, ja skaitāmo objektu kopu var sadalīt vairākās šķirtās daļās, katrā no kurām šos objektus var skaitīt neatkarīgi un, iespējams, pat ar dažādām metodēm.

Summas likumu var vispārināt arī uz vairāku šķirtu kopu apvienojuma gadījumu: *ja* $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ *un* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *visiem* $i \neq j$, *tad*

$$|A| = |A_1| + A_2| + ... + |A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

2.5. piemērs. Ja no pilsētas A var aizbraukt uz pilsētu B caur pilsētām C vai D N_C vai N_D veidos, tad kopējais ceļu skaits no A uz B ir vienāds ar $N_C + N_D$.

Pielietojot summas likumu, var sastapties ar dažādiem iespējamo variantu skaita sadalījumiem:

1) varianti var būt sadalīti "vienmērīgi" pa kopām A_i;
2) dažas kopas A_i ir jāuzskata par īpašiem speciālgadījumiem, kuros variantu skaits ir būtiski mazāks nekā citās kopās.

Ir uzdevumi, kuros elementi dažādās kopās ir jāskaita ar dažādām metodēm. Var būt arī nepieciešams pielietot summas likumu vairākas reizes viena uzdevuma risināšanas gaitā.

2.3.3. Reizināšanas likums

Ja $A = B \times C$, *tad*

$$\underbrace{|A|}_{grūti} = \underbrace{|B|}_{viegli} \cdot \underbrace{|C|}_{viegli}.$$

Šo likumu izmanto, ja skaitāmos objektus var uzdot kā virknes, kuru elementi var tikt skaitīti pēctecīgi un neatkarīgi viens no otra.

Kopas B un C var būt gan fiksētas, gan arī atkarīgas viena no otras. Svarīgi ir tas, lai visiem kopas B elementiem atbilstu vienāds skaits kopas C elementu un otrādi.

Reizināšanas likumu var vispārināt arī uz vairāku kopu tiešā reizinājuma gadījumu: ja $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, tad

$$|A| = |A_1| \times |A_2| \times ... \times |A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

2.6. piemērs. Pieņemsim, ka visi ceļi no A uz B iet caur C. Ja no A uz C var aizbraukt N_{AC} veidos un no C uz B var aizbraukt N_{CB} veidos, tad no A uz C var aizbraukt $N_{AC} \times N_{CB}$ veidos, jo katru ceļu no A uz C var uzdot kā sakārtotu elementu pāri (u, v), kur u ir ceļš no A uz C un v ir ceļš no C uz B.

2.3.4. Dalīšanas likums

Ja kopa A ir sadalīta pēc elementu skaita vienādās m elementus lielās apakškopās, tad šādu apakškopu skaits ir vienāds ar

$$\frac{|A|}{m}.$$

Šo likumu izmanto, ja

- skaitāmo objektu kopu var sadalīt vienāda un zināma lieluma apakškopās, kuru skaitu var noteikt relatīvi viegli,
- ir jāatrod apakškopu skaits, ja ir zināms kopējais elementu skaits un skaits katrā apakškopā.

2.3.5. Vienlieluma likums

Ja eksistē bijektīva funkcija $A \to B$, tad

$$\underbrace{|A|}_{grūti} = \underbrace{|B|}_{viegli}.$$

Šo likumu izmanto, ja dotajā kopā A ir grūti saskaitīt elementus, bet eksistē un ir viegli redzama kāda cita kopa B, kuras elementus ir iespējams relatīvi viegli saskaitīt, un bijektīva funkcija, kas saista A un B.

Vienlieluma likumu sauksim arī par *skaitīšanu ar bijekcijas palīdzību*.

Pielietojot šo metodi, ir iespējami šādi gadījumi:

1) kopa B pēc savas dabas būtiski atšķiras no kopas A, tādējādi kopas B ieviešana būtiski izmaina uzdevuma risināšanas gaitu (apakškopas un bitu vektori);

2) kopa B atšķiras no kopas A ar tādām detaļām, kas tikai palīdz atrisināt uzdevumu, neizmainot to būtiski (vieninieka atmešana kompozīcijas virknes galā);

3) šo metodi var pielietot arī "iekšēji": skaitāmo elementu kopu sadalīt vairākās apakškopās, starp kurām ir bijekcijas, tad skaitīt elementus tajās apakškopās, kurās tas ir vieglāk izdarāms.

2.7. piemērs. Pieņemsim, ka katram studentam pieder tieši viena cepure. Lai saskaitītu studentus, pietiek saskaitīt to cepures, un otrādi, lai saskaitītu cepures, pietiek saskaitīt studentus.

Vienlieluma likumu vispārināt, ja ir dota patvaļīga funkcija $f : A \to B$.

2.1. teorēma. Ja A un B ir galīgas kopas un f ir funkcija no A uz B, tad

1) f ir injektīva funkcija $\implies |A| \leq |B|$,

2) f ir sirjektīva funkcija $\implies |A| \geq |B|$,

3) f ir bijektīva funkcija $\Longrightarrow$ $|A| = |B|$.

PIERĀDĪJUMS Visi apgalvojumi seko no funkciju speciālgadījumu definīcijām.■

2.3.6. Skaitīšana izmantojot papildinājumu (atņemšanas likums)

Šo metodi izmanto, ja ir vieglāk noteikt elementu skaitu sākotnējās kopas papildinājumā un universā nekā sākotnējā kopā, kuras elementus ir uzdots saskaitīt. Apzīmēsim universu ar U, tad

$$U = A \cup (U \setminus A), |U| = |A| + |U \setminus A|$$

un

$$\underbrace{|A|}_{\text{grūti}} = \underbrace{|U|}_{viegli} - \underbrace{|U \setminus A|}_{viegli}.$$

Ja kopa A tiek definēta ar kādu nosacījumu P, tad kopa $U \setminus A$ tiek definēta ar nosacījumu $\neg P$ un šo kopu elementu skaitīšanas grūtības pakāpes var būt dažādas.

2.8. piemērs. Cik ir divu dažādu elementu virkņu (sakārtotu pāru) kopā, kas satur 10 elementus. Saskaņā ar reizināšanas likumu ir $10 \cdot 10$ dažādu sakārtotu pāru, no kuriem 10 pāros abi elementi ir vienādi. Sakārtotā elementu pārī elementi var būt vai nu vienādi, vai arī dažādi, tāpēc pāru skaits ar dažādiem elementiem ir vienāds ar $100 - 10 = 90$.

2.9. piemērs. Ir dota pilsēta, kuras pašvaldība plāno uzsākt ielu remontu. Ir zināms, ka 98% ielu ir jāremontē. Kā uzdot remontējamās ielas? Acīmredzams risinājums ir šāds: pārskaitīt ielas, kuras NAV jāremontē.

2.3.7. Skaitīšana divos dažādos veidos

Skaitot vienas galīgas kopas elementus divos vai vairāk veidos, atbilde, protams, ir viena un tā pati, bet tā var būt izteikta un interpretēta dažādos veidos, kurus analizējot var iegūt interesantus kombinatoriskus rezultātus.

Par šo metodi var domāt arī kā par saskaitāmo kārtības maiņu summā.

2.10. piemērs.
Skaitļu tabulas elementu summu var atrast divos veidos:

- no sākuma saskaitīt skaitļu summu katrā rindā, pēc tam atrast visu šādi iegūto skaitļu (katras rindas locekļu summu) summu;
- no sākuma saskaitīt skaitļu summu katrā kolonnā, pēc tam atrast visu šādi iegūto skaitļu (katras kolonnas locekļu summu) summu.

Ir skaidrs, ka abi paņēmieni dos vienu rezultātu, jo summa nemainās, ja saskaitāmos maina vietām.

2.3.8. Dirihlē princips

Risinot dažādus kombinatorikas uzdevumus, nereti nākas noteikt, cik daudzi no apskatāmajiem objektiem apmierina kādu īpašību.

Šī uzdevuma atrisināšanai ir lietderīgi domāt par doto īpašību kā par objektu ievietošanu kastēs vai kā par objektu kopas attēlošanu uz īpašības vērtību kopu.

Šādā interpretācijā objektu skaits ar doto īpašību ir vienāds ar to skaitu atbilstošajā kastē vai ar atbilstošās īpašības vērtības inversā attēla elementu skaitu.

Atbilstošo kombinatorikas principu, kas ļauj novērtēt objektu skaitu ar doto īpašību, sauksim par Dirihlē principu (par godu matemātiķim L.Dirihlē).

Dirihlē princips ("baložu būru princips"):

- *vienkāršākajā (klasiskajā) formā - sadalot $n+1$ elementus lielu kopu n apakškopās, vismaz viena apakškopa satur vismaz divus elementus (saliekot $n+1$ baložus n būros, vismaz vienā būrī ir vismaz divi baloži);*
- *klasiskā formā izmantojot funkcijas - funkcija no $n+1$ elementus lielas kopas uz n elementus lielu kopu nevar būt injektīva;*

- *daļveida formā - sadalot m elementus lielu kopu k apakškopās, vismaz viena apakškopa satur vismaz $\lceil \frac{m}{k} \rceil$ elementus, kur $\lceil x \rceil$ ir skaitļa x "griesti" (mazākais veselais skaitlis, kas nav mazāks kā x);*
- *bezgalīgajā formā - sadalot bezgalīgu kopu galīga skaita apakškopās, vismaz viena apakškopa būs bezgalīga.*

Dirihlē principu izmanto gan kombinatorikā, gan ģeometrijā.

2.11. piemērs. Jebkuru astoņu cilvēku kolektīvā ir divi, kas ir dzimuši vienā nedēļas dienā.

Jebkurā 25 cilvēku grupā eksistē 4 cilvēki, kas ir dzimuši vienā nedēļas dienā.

Ja kvadrātā ar malas garumu 2 tiek ievietoti 5 punkti, tad vismaz divi no tiem atrodas attālumā ne mazāk kā $\sqrt{2}$ viens no otra.

3. 1.mājasdarbs

3.1. Obligātie mājasdarbi

1.1 Izteikt doto virkņu veidotājfunkcijas $\sum_{n \geq n_0} a_n x^n$ elementāru funkciju veidā:

(a) $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1,$

(b) $a_n = \frac{1}{n!}, n \geq 0,$

(c) $a_n = \sin(\omega n), n \geq 0,\ \omega \in \mathbb{R}.$

1.2 Cik veidos uz šaha galdiņa var izvietot divus dažādu krāsu karaļus tā, lai tie neapdraudētu viens otru?

1.3 Studentu grupa, kurā ir 41 cilvēks, nokārtoja sesiju, kurā bija trīs eksāmeni. Visi studenti saņēma atzīmes 4, 5 vai 6. Pierādīt, ka vismaz pieci studenti nokārtoja sesiju ar vienādām atzīmēm.

1.4 Kāda eksāmena jautājumi ir sadalīti 4 grupās, katrā grupā ir 30 jautājumi. Eksāmena biļetē ir pa divi jautājumi no katras grupas. Cik dažādu eksāmena biļešu ir iespējams sastādīt?

1.5 Virkni $(a_1, ..., a_n)$ sauc par *palindromu*, ja

$$a_1 = a_n, a_2 = a_{n-1}, ..., a_k = a_{n-k+1};\ \forall\ k : 1 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right].$$

Cik palindromu var izveidot no n-multikopas elementiem?

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

1.6 Pierādīt, ka katra dažādu reālu skaitļu virkne ar garumu $n^2 + 1$ satur vai nu augošu virkni ar garumu n, vai arī dilstošu virkni ar garumu n.

1.7 Kādam m skaitlis C_n^m pieņem maksimālo iespējamo vērtību, ja n ir fiksēts?