DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

9.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

1. Veidotājfunkciju metode **4**

1.1. Pamatfakti 4

1.1.1. Motivācijas 4

1.1.2. Definīcijas 6

1.1.3. Teilora rindas 9

1.1.4. Vairāku argumentu veidotājfunkcijas 11

1.2. Klasiski piemēri 12

1.3. Operācijas ar veidotājfunkcijām un to kombinatoriskā interpretācija 18

1.3.1. Summa 19

1.3.2. Reizinājums 21

1.3.3. Virknes 27

1.3.4. Iezīmēšana 28

1.3.5. Daži triki 30

2. 9.mājasdarbs **31**

2.1. Obligātie uzdevumi 31

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi 32

1. Veidotājfunkciju metode

1.1. Pamatfakti

1.1.1. Motivācijas

Ja ir jāatrod virknes $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ vispārīgā locekļa a_n atkarība no n, tad var būt lietderīgi mēģināt izveidot no šīs virknes locekļiem kādu citu objektu, kas saturētu visu informāciju par virkni, bet būtu vieglāk analizējams.

Plaši izplatīta kombinatorikas metode, kurā ir realizēta šī ideja, ir *veidotājfunkciju metode*:

- izmantojot informāciju par virkni, piemēram, rekurentās sakarības, virknei tiek piekārtota funkciju rinda, kuru bieži var identificēt ar elementāru funkciju,
- tiek pētīta šī jaunizveidotā funkciju rinda - *veidotājfunkcija* un secinājumi tiek attiecināti uz virknes locekļiem.

Veidotājfunkcija tiek definēta tā, lai, zinot veidotājfunkciju, varētu relatīvi viegli atrast atbilstošās virknes locekļus.

Veidotājfunkciju pētīšana parasti ir saistīta ar algebras un matemātiskās analīzes tehnikas pielietošanu, un virknes locekļu atrašana tiek reducēta uz algebrisku vienādojumu vai diferenciālvienādojumu risināšanu.

Algebriskās un analītiskās operācijas ar veidotājfunkcijām var interpretēt kombinatorikas terminos.

1.1.2. Definīcijas

Ja ir dota skaitļu virkne $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ (piemēram, kādas diskrētu objektu klases $\{\mathcal{A}_n\}$ *skaitošā funkcija*), tad formālu pakāpju rindu

$$A(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$$

sauksim par virknei atbilstošo *veidotājfunkciju* un formālu pakāpju rindu

$$A_{exp}(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

sauksim par virknes *eksponenciālo veidotājfunkciju*.

Divas veidotājfuncijas sauksim par vienādām jeb *formāli vienādām*, ja attiecīgie koeficienti pie vienādām argumenta pakāpēm ir vienādi.

Identificēsim ar virknes veidotājfunkciju jebkuru izteiksmi, kas ir ar to formāli vienāda.

Ja ir dota veidotājfunkcija $A(x)$, tad ar $[x^n]A(x)$ apzīmēsim tās Teilora koeficientu pie x^n.

Kombinatorikas uzdevumu risināšana, izmantojot veidotājfunkcijas, parasti notiek pēc šāda algoritma:

1) uzdevuma nosacījumi tiek pārveidoti nosacījumos, kurus apmierina veidotājfunkcijas;
2) tiek atrastas veidotājfunkcijas vai izdarīti iespējamie secinājumi par to dabu;
3) izmantojot Teilora rindu teoriju, tiek atrasti veidotājfunkciju koeficienti.

Veidotājfunkciju teorija balstās uz ideju vispārināt skaitīšanu šādā veidā. Ja ir dota kopa A (iespējams, bezgalīga) un kopa R ar asociatīvu un komutatīvu bināru operāciju, tad fiksēsim funkciju $w : A \to R$ un skaitīsim katru mūs interesējošās kopas A elementu $a \in A$ ar savu svaru $w(a)$, tādējādi rezultātā mēs iegūsim formālu summu

$$\sum_{a \in A} w(a),$$

ko sauksim par kopas A *veidotājfunkciju attiecībā uz svaru* w un apzīmēsim ar $G(A, w)$.

Ievērosim šo vispārināšanas soli: vienkāršā (matemātiķu žargonā - "naivā") skaitīšana $\sum_{a \in A} 1$ tiek vispārināta uz skaitīšanu ar svaru $\sum_{a \in A} w(a)$.

Veidotājfunkciju tagad varam interpretēt kā skaitīšanas rezultātu, kurā katrs skaitāmās kopas objekts ar parametru n tiek skaitīts ar svaru x^n.

Tādējādi veidotājfunkcija ir matemātiska konstrukcija, kas atbilstošajā nozīmē satur informāciju par doto kombinatorikas uzdevumu kopumā.

Veidotājfunkcijas pirmais sāka izmantot 18.gs. matemātiķis De Muavrs.

1.1.3. Teilora rindas

Summēšana (tāpat kā virkne) var sākties ar jebkuru indeksu, visbiežāk ar 0 vai 1.

Var redzēt, ka veidotājfunkcija $A(x)$ var tikt interpretēta kā Teilora rinda punkta $x = 0$ apkārtnē. Ja ir iespējams, veidotājfunkciju ir jāmēğina pierakstīt elementāras funkcijas veidā.

Jāpiebilst, ka jautājumi par veidotājfunkciju konverğenci vai konverğences rādiusu klasiskajā nozīmē parasti kombinatorikā nespēlē izšķirošo lomu.

Atgādināsim, ka, ja $f(x)$ ir bezgalīgi daudzas reizes atvasināma funkcija un kādā punkta $x = 0$ apkārtnē var tikt izvirzīta pakāpju rindā

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n,$$

tad

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Izmantojot Teilora rindu teoriju virknes veidotājfunkciju var identificēt ar tās kompakto pierakstu elementāras funkcijas veidā.

Atzīmēsim arī to, ka polinomu var uzskatīt par veidotājfunkciju, kurai tikai galīgs skaits koeficientu ir atšķirīgi no 0.

Analīzē Teilora koeficienti tiek izmantoti, lai iegūtu secinājumus par funkciju. Kombinatorikā informācija par funkciju tiek izmantota, lai iegūtu informāciju par tās Teilora koeficientiem.

1.1.4. Vairāku argumentu veidotājfunkcijas

Veidotājfunkcijas ideju var vispārināt uz virknēm, kas ir atkarīgas no vairākiem indeksiem. Ja ir dota skaitļu virkne $\{a_{i_1,\ldots,i_n}\}_{i_j \in \mathbb{N}}$, kas ir atkarīga no n naturāliem indeksiem, tad formālu pakāpju rindu

$$A(x_1, ..., x_n) = \sum_{i_1>0,\ldots,i_n>0} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} ... x_n^{i_k}$$

sauksim par virknei atbilstošo *daudzargumentu veidotājfunkciju*.

Divas daudzargumentu veidotājfunkcijas ir vienādas, ja attiecīgie koeficienti pie vienādiem monomiem ir vienādi.

Daudzargumentu veidotājfunkcijas tiek pielietotas, ja skaitāmie objekti ir atkarīgi no vairākiem diskrētiem parametriem.

1.2. Klasiski piemēri

1.1. piemērs. Virknes $(1, 1, 1, 1, ...)$ veidotājfunkcija ir

$$A(x) = 1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}.$$

Virknes $(a, a^2, a^3, ...)$ (ģeometriskās progresijas) veidotājfunkcija ir

$$B(x) = a + a^2 + ... = a(1 + ax + a^2x^2 + ...+) = \frac{a}{1-ax}.$$

1.2. piemērs. Galīgas virknes $(C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n)$ kā augšējā indeksa funkcijas veidotājfunkcija ir

$$C_n(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n = (1+x)^n.$$

1.3. piemērs. Ja $a_n = 2^n$ (n-elementu kopas apakškopu skaits), tad

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}.$$

1.4. piemērs. Atcerēsimies, ka Fibonači virkne tiek definēta šādā veidā:

$$a_0 = 1, a_1 = 1, ..., a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Definēsim

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Salīdzināsim veidotājfunkcijas

$$F(x),$$
$$xF(x),$$
$$x^2 F(x).$$

Var ievērot, ka

$$F(x) = 1 + xF(x) + x^2 F(x),$$

atrisinot šo vienādojumu attiecībā uz $F(x)$, iegūstam

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2},$$

tālāk izvirzām Teilora rindā un atrodam atbildi

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}).$$

Piezīmēsim, ka veidotājfunkcija $C(x)$ apmierina lineāru sakarību, tāpēc to var saukt par *lineāru veidotājfunkciju*.

1.5. piemērs. Atrisināsim nehomogēnu lineāru pirmās kārtas rekurentu sakarību

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, a_0 = 0, n \geq 0.$$

Reizināsim abas puses ar x^n un formāli summēsim no 1 līdz ∞:

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n = 2\sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^n + \sum_{n\geq 1} x^n.$$

Apzīmējot meklējamās virknes veidotājfunkciju ar $A(x)$, iegūsim sakarību

$$A(x) = 2xA(x) + \frac{x}{1-x}.$$

Atrisinot šo sakarību attiecībā uz $A(x)$, iegūsim, ka

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}.$$

Šajā gadījumā ir lietderīgi sadalīt atrasto racionālo funkciju parciāldaļu summā un izteikt atbildi kā parciāldaļu koeficientu summu:

$$A(x) = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0}(2x)^n - \sum_{n\geq 0} x^n = \sum_{n\geq 0}(2^n - 1)x^n,$$

tātad $a_n = 2^{n-1}$.

1.6. piemērs. Cik dažādos veidos 8 identiskas monētas var sadalīt 3 daļās tā, ka katrā daļā ir vismaz 2, bet ne vairāk kā 4 monētas?

Apzīmēsim ar a_n to veidu skaitu, kādos n konfektes var sadalīt 3 daļās definētajā veidā. Var redzēt, ka a_n ir vienāds ar koeficientu pie x^n polinomā

$$(x^2 + x^3 + x^4)^3$$

tāpēc, ka a_n ir vienāds ar vienādojuma $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ pozitīvo atrisinājumu skaitu, kas apmierina nosacījumu $2 \leq \alpha_i \leq 4$.

1.7. piemērs. Ar $p(n)$ mēs apzīmējam naturāla skaitļa sadalījumu skaitu. Definēsim arī $p(0) = 1$ kā izņēmumu.

Pierādīsim, ka veidotājfunkcija $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$ apmierina sakarību

$$P(x) = \prod_{j\geq 1} \frac{1}{1-x^j}.$$

Tiešām, redzam, ka

$$\prod_{j\geq 1} \frac{1}{1-x^j} = (1+x+x^2+...)(1+x^2+x^4...)...(1+x^n+x^{2n}+...)...$$

Formāli atverot iekavas šajā bezgalīgajā reizinājumā, redzam, ka locekli ar x^n var iegūt, izvēloties, piemēram, reizinātāju x^{n_1} no pirmajām iekavām, reizinātaju x^{n_2} no otrajām iekavām un tā tālāk. Kāpinātāji apmierina sakarību

$$n_1 + 2n_2 + ... = n.$$

Katra šādas kāpinātāju sistēmas izvēle koeficientam pie x^n dod ieguldījumu vienādu ar 1, tātad šis koeficients ir vienāds ar $p(n)$.

1.3. Operācijas ar veidotājfunkcijām un to kombinatoriskā interpretācija

No diskrētu objektu saimēm jeb *kombinatoriskajām klasēm* var konstruēt citu, sarežģītāku diskrētu objektu saimes, veicot kopu teorētiskās un citas operācijas.

Lai skaitītu šādus jaunizveidotus objektus, var mēģināt veikt tādas operācijas ar veidotājfunkcijām, kas iekodē operācijas ar skaitāmajiem objektiem. Operācijas ar veidotājfuncijām var būt ar algebrisku vai analītisku raksturu.

Tālāk mēs izmatosim kombinatorisko klašu terminoloģiju:

- kombinatoriskā klase - $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_n\}$,
- ja $a \in \mathcal{A}_n$, tad teiksim, ka objekta a *izmērs* $|a|$ ir vienāds ar n,
- par kombinatoriskās klases $\mathcal{A}$ skaitošo virkni sauksim virkni $\{a_n\} = \{|\mathcal{A}_n|\}$,
- objekti sastāv no *atomiem* visbiežāk atomi ir kopu elementi, simboli u.c.

1.3.1. Summa

Divu veidotājfunkciju summu definē kā šādi:

$$(\sum_{n\geq 0} a_n x^n) + (\sum_{n\geq 0} b_n x^n) = \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n.$$

Ja ir dotas divas kombinatoriskās klases

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_n\},$$
$$\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_n\},$$

kurām izpildās nosacījums

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset,$$

tad par to summu sauksim klasi

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}.$$

Par objekta $c \in \mathcal{C}$ izmēru sauksim tā izmēru sākotnējā klasē.

Redzam, ka

$$|\mathcal{C}_n| = |\mathcal{A}_n| + |\mathcal{B}_n|,$$

tāpēc

$$C(x) = \sum_{n\geq 0} |\mathcal{C}_n| x^n = \sum_{n\geq 0} (|\mathcal{A}_n| + |\mathcal{B}_n|) x^n =$$

$$\sum_{n\geq 0} |\mathcal{A}_n| x^n + \sum_{n\geq 0} |\mathcal{B}_n| x^n = A(x) + B(x).$$

Redzam, ka definētā veidotājfunkciju summa skaita kombinatorisko klašu summas (apvienojuma) objektus.

1.3.2. Reizinājums

Divu veidotājfunkciju reizinājumu definē kā pakāpju rindu formālu reizinājumu, atverot iekavas:

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

kur $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.

Ja ir dotas divas kombinatoriskās klases

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_n\},$$
$$\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_n\},$$

tad par to reizinājumu sauksim klasi

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}.$$

Par objekta $c = (a, b) \in \mathcal{C}$ izmēru sauksim lielumu

$$|c| = |a| + |b|.$$

Redzam, ka saskaņā ar reizināšanas un summas likumu

$$|\mathcal{C}_n| = |\mathcal{A}_0||\mathcal{B}_n| + |\mathcal{A}_1||\mathcal{B}_{n-1}| + \ldots + |\mathcal{A}_n||\mathcal{B}_0| = \sum_{i=0}^{n} |\mathcal{A}_i||\mathcal{B}_{n-i}|,$$

tāpēc

$$C(x) = \sum_{n\geq 0} |\mathcal{C}_n|x^n = (\sum_{n\geq 0} |\mathcal{A}_n|x^n) \cdot (\sum_{n\geq 0} |\mathcal{B}_n|x^n) = A(x)B(x).$$

Redzam, ka veidotājfunkciju reizinājums skaita kombinatorisko klašu reizinājuma objektus.

1.8. piemērs. *Katalāna skaitļi* C_n. Cik veidos var *triangulēt* (sadalīt trijstūros ar diagonālēm, tā lai tās nekrustotos) $n+1$-stūri (fiksētu)?

Definēsim $C_0, C_1 = 1$. Redzam, ka

$$C_2 = 1, C_3 = 2, C_4 = 5.$$

Pierādīsim, ka visiem $n \geq 2$ izpildās rekurenta sakarība

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}.$$

Ja $n = 2$, tad vienādība izpildās:

$$C_2 = 1 = 1 \cdot 1 = C_1 C_1.$$

Ja $n = 3$, tad vienādība izpildās:

$$C_3 = 2 = C_1 C_2 + C_2 C_1 = 1 + 1 = 2.$$

Ja n ir patvaļīgs, tad fiksēsim vienu $n+1$-stūra malu. Ievērosim šādus faktus:

- šī mala ir viena no kāda trijstūra T malām,
- visa triangulācija sastāv no sakārtotas virknes (X_1, T, X_2), kur X_1 ir kāda triangulācija $k+1$-stūrim un X_2 ir kāda triangulācija $n-k+1$-stūrim,
- $1 \le k \le n-1$,
- kopējais triangulāciju skaits ar fiksētu k ir vienāds ar
$$C_k C_{n-k},$$
- kopējais triangulāciju skaits saskaņā ar summas likumu ir vienāds ar
$$\sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}.$$

Apskatīsim atbilstošo veidotājfunkciju
$$C(x) = \sum_{n\ge 0} C_n x^n.$$

Salīdzināsim veidotājfunkcijas $C(x)$ un $C^2(x)$.

Redzam, ka

$$C^2(x) = (C_1x + C_2x^2 + ...+)(C_1x + C_2x^2 + ...+) =$$
$$(C_1^2)x^2 + (C_1C_2 + C_2C_1)x^3 + ... =$$
$$C_2x^2 + C_3x^3 + ... = C(x) - x.$$

Iegūstam vienādojumu

$$C(x) = C^2(x) + x,$$

kuru, atrisinot attiecībā uz $C(x)$, iegūstam

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}.$$

Tā kā $C_0 = 0$, tad mums ir jāņem "mīnus" zīme. Tālāk izvirzām Teilora rindā un iegūstam, ka

$$C_{n-1} = \frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}.$$

Piezīmēsim, ka veidotājfunkcija $C(x)$ apmierina kvadrātisku polinomiālu sakarību, tāpēc to var saukt par *kvadrātisku veidotājfunkciju*.

1.3.3. Virknes

Apzīmēsim ar $\mathcal{E}$ kombinatorisku klasi, kurai ir tikai viens elements ar izmēru 0 (*tukšā objekta klase*).

Ir dota kombinatoriska klase $\mathcal{A}$, kurai $\mathcal{A}_0 = \emptyset$. Tās elementu virkņu kopa $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ ir izsakāma veidā

$$\mathfrak{S}(\mathcal{A}) = \mathcal{E} \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^2 \cup \mathcal{A}^3 \cup ...$$

Redzam, ka $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ veidotājfunkcija $SA(x)$ ir vienāda ar

$$1 + A(x) + A^2(x) + ... = \frac{1}{1 - A(x)}.$$

1.9. piemērs. ja $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$ un $\mathcal{A}_1 = n$, tad $A(x) = nx$ un

$$SA(x) = \frac{1}{1 - nx}.$$

1.3.4. Iezīmēšana

Veidotājfunkcijas atvasināšana tiek definēta šādi:

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

Ir dota kombinatoriska klase $\mathcal{A}$. Tās *iezīmēto objektu klase* $\Theta(\mathcal{A})$ ir klase, kuras elementi ir $\mathcal{A}$ elementi ar vienu iezīmētu atomu.

1.1. piezīme. Var redzēt, ka $\Theta(\mathcal{A})$ ir izsakāma veidā

$$\Theta(\mathcal{A}) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{A}_n \times \{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\},$$

kur ϵ_i ir dažādi objekti ar izmēru 0.

Redzam, ka ja $\mathcal{B} = \Theta(\mathcal{A})$, tad

$$|\mathcal{B}_n| = n|\mathcal{A}_n|,$$

tāpēc

$$B(x) = xA'(x).$$

1.10. piemērs. Cik veidos no n elementu kopas var izvēlēties komandu un treneri (treneris var būt arī komandas loceklis). Bināru virkņu terminos - cik ir bināru virkņu ar garumu n un vienu iezīmētu elementu?

Atradīsim meklējamās virknes veidotājfunkciju. Zinām, ka bināru virkņu skaita veidotājfunkcija ir

$$A(x) = \frac{1}{1-2x},$$

tāpēc meklējamā veidotājfunkcija ir

$$B(x) = x(\frac{1}{1-2x})' = \frac{2x}{(1-2x)^2}.$$

1.3.5. Daži triki

Atzīmēsim vēl dažus lietderīgus trikus, kurus izmanto darbā ar veidotājfunkcijām:

- $A(x) \to A(x) - a_n x^n$ - n-tā koeficienta anulēšana, iegūstam virkni
$$(a_0, a_1, ..., a_{n-1}, 0, a_{n+1}, ...);$$
- $A(x) \to A(x^2)$ - koeficientu "izretināšana", iegūstam virkni
$$(a_0, 0, a_1, 0, ...);$$
- $A(x) \to \frac{A(x)-a_0}{x}$ - koeficientu nobīde negatīvajā virzienā par vienu vienību, iegūstam virkni
$$(a_1, a_2, ...);$$
- $A(x) \to \int_0^x A(t)dt$ - koeficientu dalīšana ar naturāliem skaitļiem, iegūstam virkni
$$(0, a_1/2, a_2/3, ...);$$

2. 9.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

9.1 Izteikt doto virkņu veidotājfunkcijas elementāru funkciju veidā:

(a) $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$,
(b) $a_n = \frac{1}{n!}, n \geq 0$,
(c) $a_n = C_n^2$,
(d) $a_n = sin(\omega n), n \geq 0$.

9.2 Izmantojot veidotājfunkcijas atrisiniet rekurentu sakarību

$$a_n = u_1 a_{n-1} + u_{n-2} + vn + w,$$

kur u_1, u_2, v, w ir reāli parametri.

9.3 Apzīmēsim ar a_n visu iespējamo virkņu (bez atkārtojumiem, ieskaitot tukšo virkni) skaitu, kuras var izveidot no n-kopas elementiem, definēsim $a_0 = 1$. Pierādiet, ka ir spēkā rekurenta sakarība

$$a_n = na_{n-1} + 1,$$

atrodiet virknes $\{a_n\}$ eksponenciālo veidotājfunkciju.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

9.4 Definēsim *harmoniskos skaitļus* ar šādiem nosacījumiem:

$$h_0 = 0, h_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Pierādīt, ka harmoniskie skaitļi apmierina šādas rekurentas sakarības visiem $n \geq 1$:

(a)

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = (n+1)(h_{n+1} - 1),$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{n} i h_i = C_{n+1}^{2}(h_{n+1} - 1/2),$$

(c)

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^k h_i = C_{n+1}^{k+1}(h_{n+1} - \frac{1}{k+1}).$$

Pierādīt, ka harmonisko skaitļu virknes veidotājfunkcija ir vienāda ar

$$\frac{1}{1-x}\ln(\frac{1}{1-x}).$$