DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

8.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

1. Rekurento sakarību metode

1.1. Pamatdefinīcijas

Risinot kombinatorikas uzdevumus, nereti rodas situācija, kad ir grūti uzreiz saskatīt atbildi vai pat hipotēzi. Tāda situācija gadās arī tad, ja ir jāatrod virknes $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ vispārīgā locekļa a_n atkarība no n.

Lietderīga šādu uzdevumu risināšanas stratēģija ir izteikt virknes vispārīgo locekli a_n kā funkciju no iepriekšējiem šīs virknes locekļiem un mēģināt izdarīt pietiekoši daudz secinājumu, lai atrastu atbildi - a_n atkarības veidu no n.

Šī ideja ir kombinatorikas pamatprincipa "skaldi un valdi" pielietošanas piemērs. Informāciju par saistību starp a_n un iepriekšējiem virknes locekļiem parasti iegūst pētot to, kā skaitāmie objekti ar indeksu n tiek veidoti no mazākiem objektiem.

Realizējot šādu stratēğiju, ir nepieciešams arī atrast dažu (parasti dažu pirmo) virknes locekļu vērtības - "sākuma nosacījumus".

Tātad rekurento sakarību metodi var formulēt šādā veidā: ja ir jāatrod virknes vispārīga locekļa izteiksme, tad var būt lietderīgi, izmantojot uzdevuma nosacījumus,

1. meklēt sakarības
$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1)$$
un sākuma nosacījumus;
2. pēc tam atrast formulu a_n aprēķināšanai, neizmantojot iepriekšējās a_i vērtības.

Sakarību
$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1)$$
sauksim par *rekurentu sakarību*. Viens no pirmajiem dokumentētajiem rekurento sakarību izmantošanas piemēriem ir atrodams 13.gs. matemātiķa L.Fibonači darbos.

Rekurentās sakarības tiek meklētas

- sadalot skaitāmās kopas objektus ar indeksu n mazākās daļās,
- pētot, kā objekti ar indeksu n ir atkarīgi no objektiem ar indeksu $n-1, n-2, \ldots$.

Rekurentu sakarību sauksim par *k-tās kārtas* rekurentu sakarību, ja a_n var izteikt, izmantojot $a_{n-1}, \ldots, a_{n-k}$.

Par rekurentas sakarības atrisinājumu sauksim jebkuru virkni, kas apmierina šo sakarību. Rekurentas sakarības atrisinājums ir noteikts viennozīmīgi, ja ir doti pietiekoši daudz sākuma nosacījumu.

Rekurentu sakarību sauksim par *homogēnu*, ja nulles virkne

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_n = \ldots = 0$$

ir tās atrisinājums, pretējā gadījumā rekurentu sakarību sauksim par *nehomogēnu*.

Rekurentu sakarību sauksim par *lineāru*, ja tai ir galīga kārta un funkcija f ir lineāra.

Tiek izmantotas arī rekurentu sakarību sistēmas.

1.1. piemērs. Datorzinātnē rekurento sakarību teorija tiek pielietota ciklisku un rekursīvu algoritmu resursu (laika) novērtēšanai.

1.2. piemērs. Virkņu piemēri, kas apmierina vienkāršas rekurentas sakarības ir aritmētiskā un ģeometriskā progresija, kuru rekurentās sakarības ir

$$a_n = a_{n-1} + d$$

un

$$a_n = a_{n-1}q.$$

1.2. Klasisko kombinatorisko skaitļu rekurentās sakarības

1.2.1. Variācijas

Redzam, ka

$$\bar{A}_n^m = \bar{A}_n^{m-1} \cdot n,$$

jo katrai virknei ar atkārtojumiem ar garumu $m-1$ galā var pielikt jebkuru no n elementiem. Šo spriedumu var modelēt ar divdaļīgu grafu.

Redzam, ka

$$A_n^m = A_n^{m-1} \cdot (n-m+1),$$

jo katrai virknei bez atkārtojumiem ar garumu $m-1$ galā var pielikt jebkuru no atlikušajiem $n-(m-1) = n-m+1$ elementiem. Šo spriedumu var modelēt ar divdaļīgu grafu.

Redzam, ka

$$A_n^m = A_{n-1}^{m-1} \cdot m,$$

jo katrai virknei bez atkārtojumiem no kopas ar $n-1$ elementiem ar garumu $m-1$ vienu jaunu n-tā tipa elementu var ielikt jebkurā no m vietām.

1.3. piemērs. Apskatīsim visu n elementu kopas $\{1, ..., n\}$ permutāciju skaita P_n atrašanas uzdevumu. Parādīsim, ka P_n apmierina rekurentu sakarību

$$P_n = P_{n-1} \cdot n.$$

Pieņemsim, ka ir zināms P_{n-1}, kas atbilst elementu kopai $\{1, ..., n-1\}$. Skaitīsim, cik veidos var sakārtot kopu $\{1, ..., n\}$, kas satur vienu "jaunu" elementu n. Ja elementi $\{1, ..., n-1\}$ jau ir sakārtoti, tad elementu n jau esošajā sakārtojumā var ievietot n veidos. Izmantojot reizināšanas likumu, iegūstam, ka $P_n = P_{n-1} \cdot n$, jo n elementus lielas kopas permutāciju var domāt kā sakārtotu pāri (f_{n-1}, x), kur pirmais objekts ir $n-1$ elementus lielas kopas permutācija un x ir pēdējā elementa "koordināte" attiecība uz f_{n-1}. Tā kā P_1, tad iegūstam, ka

$$P_2 = 2, P_3 = 3 \cdot 2 = 6, ..., P_n = n!$$

1.2.2. Kombinācijas

Redzam, ka

$$C_n^m = C_n^{m-1} \cdot \frac{(n-m+1)}{m},$$

jo katrai apakškopai ar $m-1$ elementiem var pievienot jebkuru no atlikušajiem $n-(m-1) = n-m+1$ elementiem. Savukārt katra apakškopa ar m elementiem var rasties no m mazākām apakškopām. Šo spriedumu var modelēt ar divdaļīgu grafu.

1.2.3. Stirlinga un Bella skaitļi

Redzam, ka otrā veida Stirlinga skaitļi apmierina rekurentu sakarību

$$S(n,m) = S(n-1,m-1) + mS(n-1,m),$$

jo vienu jaunu elementu var vai nu likt atsevišķā apakškopā (šādu sadalījumu skaits ir vienāds ar $S(n-1,m-1)$), vai arī pievienot kādai no jau esošajām apakškopām (šādu sadalījumu skaits ir vienāds ar $mS(n-1,m)$).

Redzam, ka pirmā veida absolūtie Stirlinga skaitļi apmierina rekurentu sakarību

$$c(n,m) = c(n-1,m-1) + (n-1)c(n-1,m),$$

jo vienu jaunu elementu var vai nu likt atsevišķā ciklā (šādu permutāciju skaits ir vienāds ar $c(n-1,m-1)$), vai arī pievienot kādai no jau esošajām pemrmutāciju (šādu permutāciju skaits ir vienāds ar $(n-1)c(n-1,m)$).

Atradīsim rekurentu sakarību Bella skaitļiem - kopu visu sadalījumu skaitu netukšās apakākopās. Var redzēt, ka

$$B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5, B_4 = 15.$$

Definēsim B_0 vienādu ar 1.

Izteiksim B_{n+1} rekurentā veidā. Pieņemsim, ka

$$X_{n+1} = \{1, ..., n+1\}$$

un apskatīsim apakškopu, kas satur elementu $n+1$, pieņemsim, ka tā satur vēl k elementus, kur $0 \leq k \leq n$, šos k elementus var izvēlēties C_n^k veidos un atlikušos $n-k$ elementus var sadalīt apakškopās B_{n-k} veidos. Tātad kopējais sadalījumu skaits, ja tā apakškopa, kas satur elementu $n+1$, satur vēl k elementus, ir $C_n^k B_{n-k}$. Saskaitot kopā visas iespējas, kas atbilst dažādām k vērtībām, iegūstam rekurentu sakarību

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_{n-k}.$$

1.2.4. Naturālo skaitļi sadalījumi

Naturālo skaitļu sadalījumu skaita funkcija $p(n)$ apmierina rekurentu sakarību

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + ...$$

Šīs sakarības pierādījums tiks dots vēlāk.

Sadalījumu skaitam ar tieši m locekļiem $p(n, m)$ ir spēkā vienkāršāka rekurenta sakarība

$$p(n, m) = p(n-1, m-1) + p(n-m, m),$$

jo pēdējā rindā var būt vai nu viens elements (tādu sadalījumu skaits ir $p(n-1, m-1)$, vai arī vairāk kā viens elements (tādu sadalījumu skaits ir $p(n-m, m)$ - nogriežam pirmo kolonnu).

1.3. Lineārās homogēnās rekurentās sakarības

1.3.1. Pamatfakti

Relatīvi viegli analizējams un risināms ir rekurento sakarību speciālgadījums, kad rekurentās sakarības labā puse ir lineāra funkcija ar fiksētu argumentu skaitu.

Ja katram $n > k + n_0$ ir spēkā sakarība

$$a_n = u_1 a_{n-1} + u_2 a_{n-2} + ... + u_k a_{n-k}$$

tad teiksim, ka virkne $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ apmierina lineāru homogēnu rekurentu sakarību (LHRS) ar kārtu k.

1.4. piemērs. Ģeometriskā progresija.

Atzīmēsim, ka virkņu kopā ir definētas divas operācijas:

- reizināšana ar skaitli - ja $x = \{x_n\}_{n \geq n_0}$, tad

$$\lambda \cdot x = \{\lambda x_n\}_{n \geq n_0},$$

- saskaitīšana - ja $x = \{x_n\}_{n \geq n_0}$ un $y = \{y_n\}_{n \geq n_0}$, tad

$$x + y = \{x_n + y_n\}_{n \geq n_0}.$$

Tādējādi virkņu kopā ir uzdota lineāras telpas struktūra.

1.1. teorēma. LHRS atrisinājumi veido lineāru telpu virs koeficientu lauka $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$.

PIERĀDĪJUMS Mums ir jāpierāda, ka

1. ja virkne x apmierina LHRS, tad katram skaitlim λ virkne λx arī apmierina to pašu LHRS,
2. ja virknes x un y apmierina LHRS, tad virkne $\alpha x + \beta y$ arī apmierina to pašu LHRS.

1. Ja virkne $x = \{x_n\}_{n \geq n_0}$ apmierina LHRS

$$a_n = u_1 a_{n-1} + u_2 a_{n-2} + ... + u_k a_{n-k},$$

tad

$$\lambda x_n = \lambda(u_1 x_{n-1} + u_2 x_{n-2} + ... + u_k x_{n-k}).$$

2. Ja virknes $x = \{x_n\}_{n \geq n_0}$ un $y = \{y_n\}_{n \geq n_0}$ apmierina homogēnu lineāru rekurentu sakarību, tad izmantojot summas īpašības, redzam, ka

$$\alpha x_n + \beta y_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha u_i x_{n-i} + \sum_{i=1}^{k} \beta u_i y_{n-i} = \sum_{i=1}^{k} u_i(\alpha x_{n-i} + \beta y_{n-i}).$$

■

1.1. piezīme. Šī teorēma nozīmē to, ka, lai atrisinātu homogēnu lineāru rekurentu sakarību, ir

1. jāatrod atrisinājumu telpas bāze - jāatrod (vai jāuzmin) daži lineāri neatkarīgi "partikulāri" atrisinājumi $\varphi_{i,n}$(indekss i apzīmē atrisinājumu un indekss n ir virknes indekss);

2. jāatrod atrisinājums, kas apmierina LHRS sākuma nosacījumu, formā

$$c_1\varphi_{1,n} + c_2\varphi_{2,n} + ..,$$

kur koeficienti c_i tiek noteikti, izmantojot sākuma nosacījumus (dažu pirmo virknes locekļu vērtības).

1.2. piezīme. Var piebilst, ka homogēnu lineāru rekurentu sakarību risināšanas metode ir analoģiska lineāru homogēnu diferenciālvienādojumu risināšanai.

1.3. piezīme. Piebildīsim arī to, ka virkņu lineārā neatkarība ir jāsaprot šādi: virkņu kopa $\{a^1, ..., a^k\}$ ir lineāri neatkarīga, ja nosacījums

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i a_n^i = 0$$

ir spēkā visiem indeksiem n tad un tikai tad, ja $\gamma_i = 0, \forall i$.

1.3.2. LHRS atrisinājumu telpas bāze

Pirmajā tuvinājumā LHRS bāzes atrisinājumus meklēsim formā

$$x_n = \lambda^n,$$

attiecībā uz λ iegūsim vienādojumu

$$\lambda^n = u_1\lambda^{n-1} + u_2\lambda^{n-2} + ... + u_k\lambda^{n-k}$$

vai

$$\lambda^k = u_1\lambda^{k-1} + u_2\lambda^{k-2} + ... + u_k, \tag{1}$$

kuru sauksim par LHRS *raksturīgo vienādojumu*.

Atrisinot raksturīgo vienādojumu, iegūsim visas iespējamās λ vērtības, ar kurām virkne $x_n = \lambda^n$ var būt atrisinājums.

Pēc tam, kad raksturīgā vienādojuma saknes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l$ ir atrastas, meklēsim atrisinājumu formā

$$a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + ... + c_l\lambda_l^n$$

vai kaut kā līdzīgi un atradīsim koeficientu c_i vērtības tā, lai apmierinātu rindas dažu pirmo locekļu vērtības.

Apskatīsim gadījumu, kad $k = 2$. Raksturīgais vienādojums ir

$$\lambda^2 = u_1\lambda + u_2,$$

kura saknēm ir iespējami divi gadījumi:

1) eksistē divas dažādas saknes λ_1, λ_2, partikulārie atrisinājumi λ_1^n un λ_2^n ir lineāri neatkarīgi, meklējam vispārīgo atrisinājumu formā

$$a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n,$$

ja saknes ir kompleksas, tad ir lietderīgi pārveidot vispārīgo atrisinājumu, izmantojot Eilera formulas;

2) viena divkārša sakne λ, eksistē 2 lineāri neatkarīgi partikulāri atrisinājumi λ^n un $n\lambda^n$, meklējam vispārīgo atrisinājumu formā

$$a_n = c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^n = \lambda^n(c_1 + c_2 n).$$

1.2. teorēma. Katrai raksturīga vienādojuma saknei λ ar kārtu k atbilst lineāri neatkarīgi atrisinājumi

$$\lambda^n, n\lambda^n, ..., n^{k-1}\lambda^n.$$

Visi šādi atrisinājumi veido LHRS atrisinājumu telpas bāzi.

PIERĀDĪJUMS Tieša pārbaude. Patstāvīgs darbs.

1.3.3. Klasiski uzdevumi

1.5. piemērs. Uzdevums par bitēm. *Fibonači virkne* tiek definēta ar šādiem nosacījumiem:

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ ja\ n > 1.$$

Raksturīgais vienādojums ir

$$\lambda^2 = \lambda + 1,$$

tā saknes ir

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

. Meklēsim vispārīgo atrisinājumu formā

$$a_n = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

Ja $n = 0$, tad iegūstam sakarību

$$1 = c_1 + c_2,$$

un, ja $n = 1$, tad sakarību

$$1 = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}).$$

Atrisinot šo lineāru vienādojumu sistēmu attiecībā uz c_1 un c_2, iegūstam, ka

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

un

$$c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

.

1.6. piemērs. Cik ir dažādu n elementus garu vārdu alfabētā $\{0, 1, 2\}$ tādu, ka jebkuri divi kaimiņu simboli atšķiras par 0 vai 1?

Apzīmēsim

- ar A_n to vārdu kopu, kas beidzas ar 1,

- ar B_n- vārdu kopu, kas beidzas ar 0 vai 2.

Apzīmēsim $|A_n|$ ar a_n un $|B_n|$ ar b_n. Mums ir jāatrod $c_n = a_n + b_n$ ar pareiziem sākuma nosacījumiem.

Domāsim par to, kā no vārdiem ar garumu $n-1$ var iegūt vārdus ar garumu n, pievienojot vienu simbolu beigās.

Teiksim, ka vārds w rada vārdu w', ja vārdu w' var iegūt no vārda w, pievienojot tam beigās vienu simbolu. Ir spēkā šādas sakarības:

- $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ (katrs vārds no A_{n-1} rada vienu jaunu vārdu no A_n un katrs vārds no B_{n-1} rada vienu jaunu vārdu no A_n);
- $b_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}$ (katrs vārds no A_{n-1} rada divus jaunus vārdus no B_n un katrs vārds no B_{n-1} rada vienu jaunu vārdu no B_n).

Iegūstam, ka

$$b_n = 2a_{n-1} + a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + a_n$$

un

$$a_{n+1} = a_n + b_n,$$

tātad

$$a_{n+1} - a_n = a_{n-1} + a_n$$

un

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}.$$

Lai atrisinātu uzdevumu līdz galam, ir jāatrod virkne $\{a_n\}$, kas apmierina sākuma nosacījumus $a_1 = 1, a_2 = 3$, jāatrod b_n pēc formulas $b_n = a_{n+1} - b_n$ un jāatrod $c_n = a_n + b_n$.

2. 8.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

8.1 X_n ir tādu apakškopu skaits kopā $\{1, ..., n\}$, kurās nav divu elementu ar pēctecīgiem numuriem. Atrast rekurentu sakarību virknes $\{X_n\}_{n>0}$ locekļiem.

8.2 Pierādīt, ka otrā veida Stirlinga skaitļi apmierina rekurentu sakarību

$$S(n,m) = \sum_{k=0}^{n-m} S(n-k-1, m-1) C_{n-1}^{k}.$$

8.3 D_n ir variantu skaits, kādos fiksētu $2 \times n$ taisnstūri var noklāt ar 2×1 domino figūrām. Atrodiet D_n.

8.4 Cik ir bināru virkņu ar garumu n, kas nesatur apakšvirkni 0101?

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

8.5 Par kopas $\{1, ..., n\}$ permutācijas $(a_1, ..., a_n)$ *kāpumu* vai *kritumu* sauksim indeksu i, tādu ka $a_i < a_{i+1}$ vai $a_i > a_{i+1}$. Par *Eilera skaitli* $E(n, k)$ sauksim kopas $\{1, ..., n\}$ permutāciju skaitu, kurās ir tieši k kāpumi. Pierādīt, ka Eilera skaitļiem izpildās šādas rekurentās sakarības:

(a) $E(n, k) = E(n, n-1-k)$;

(b) $E(n, k) = (k+1)E(n-1, k) + (n-k)E(n-1, k-1)$;

(c) $\sum_{k=0}^{n-1} E(n, k) = n!$;

(d) $E(n, k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_{n+1}^i (k+1-i)^n$;