DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

7.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

1. Ieslēgšanas-izslēgšanas formula (IIF, sieta likums) 3

1.1. Speciālgadījumi 4

1.1.1. Divas kopas 4

1.1.2. Trīs kopas 6

1.2. Vispārīgais gadījums 8

1.3. Nevienādības 13

1.4. Klasiski kombinatorikas uzdevumi, kurus var atrisināt ar IIF 15

1.4.1. Sirjektīvo funkciju skaits 15

1.4.2. Permutācijas bez fiksētajiem punktiem 18

2. 7.mājasdarbs 21

2.1. Obligātie uzdevumi 21

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi 22

1. Ieslēgšanas-izslēgšanas formula (IIF, sieta likums)

Šo metodi pielieto, ja ir jāatrod elementu skaits vairāku tādu kopu apvienojumā, kurām ir kopīgi elementi.

Ieslēgšanas-izslēgšanas formula ir summas likuma vispārinājums uz gadījumu, kad ir dots kopas pārklājums, nevis sadalījums. Atgādināsim, ka summas likums saka, ka

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|,$$

ja $A_i \cap A_j = \emptyset$ dažādiem indeksiem.

Šajā nodaļā mēs nedaudz vispārināsim skaitīšanas ideju, atļaujot skaitīt elementus arī ar negatīvu zīmi: ja ir dotas divas galīgas kopas A un B, tad starpību $|A| - |B|$ var interpretēt kā tādas skaitīšanas rezultātu, kurā katrs kopas A elements tiek skaitīts parastajā nozīmē (ar $+$ zīmi), bet katrs kopas B elements tiek skaitīts negatīvā nozīmē (ar $-$ zīmi).

1.1. Speciālgadījumi

1.1.1. Divas kopas

Sāksim izstrādāt šo metodi, apskatot speciālgadījumus, kad kopu skaits ir 2 un 3. Atradīsim elementu skaitu divu kopu A_1 un A_2 apvienojumā, ja ir zināms elementu skaits katrā no kopām un to šķēlumā.

Pirmajā tuvinājumā varam apskatīt summu

$$|A_1| + |A_2|.$$

Redzam, ka elementi, kas atrodas kopā $A_1 \cap A_2$, tiek skaitīti divas

reizes jeb ar svaru 2, tāpēc ir jāveic korekcija. Viegli redzēt, ka

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Loceklis $-|A_1 \cap A_2|$ formulas labajā pusē ir tāpēc, lai kompensētu summā $|A_1| + |A_2|$ divas reizes skaitītos šķēluma elementus.

Otrs veids, kā pierādīt šo formulu ir šāds. Ievērosim, ka

$$A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \backslash A_1)$$

un

$$(A_1 \cap A_2) \cap (A_2 \backslash A_1) = \emptyset.$$

Saskaņā ar summas likumu iegūstam, ka

$$|A_2| = |A_1 \cap A_2| + |A_2 \backslash A_1|.$$

Ievērosim arī, ka

$$|A_2 \backslash A_1| = |A_1 \cup A_2| - |A_1|,$$

tāpēc

$$|A_2| = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cup A_2| - |A_1|$$

un formula ir pierādīta.

Divu kopu apvienojuma formulu var pārrakstīt ekvivalentā veidā

$$|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|.$$

1.1.2. Trīs kopas

Atradīsim elementu skaitu trīs kopu A_1, A_2 un A_3 apvienojumā, ja ir zināms elementu skaits katrā no kopām un visos to šķēlumos.

Pirmajā tuvinājumā šo skaitu varētu pieņemt vienādu ar

$$|A_1| + |A_2| + |A_3|,$$

bet tad elementi jebkuru divu kopu šķēlumos tiks skaitīti divas vai trīs reizes, tāpēc nākošajā tuvinājumā uzskatīsim, ka elementu skaits trīs kopu apvienojumā ir vienāds ar

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|.$$

Savukārt tagad ir problēmas ar elementiem visu trīs kopu šķēlumā, jo katrs no tiem vispār netiek skaitīts. Nedaudz piepūloties, var redzēt, ka

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$
$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| +$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Līdzīgi tam, kā tas bija divu kopu gadījumā, arī šoreiz papildus locekļu summu

$$-|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

var interpretēt kā kompensējošo labojumu, lai panāktu to, ka katrs elements labajā pusē tiek algebriski (ņemot vērā skaitīšanas zīmi) skaitīts tieši vienu reizi.

1.2. Vispārīgais gadījums

Tagad apskatīsim vispārīgo gadījumu. Pieņemsim, ka ir dota galīga indeksu kopa $U = \{1, ..., n\}$ un galīga kopa A_i katram indeksam i. Katrai netukšai U apakškopai I definēsim $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$.

1.1. teorēma. (Ieslēgšanas-izslēgšanas formula)

$$|\bigcup_{i \in U} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq U} (-1)^{|I|+1} |A_I|,$$

citos apzīmējumos -

$$|A_1 \cup ... \cup A_n| =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| +$$
$$+ \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j| - ... + (-1)^{n+1} |A_1 \cap ... \cap A_n|.$$

PIERĀDĪJUMS Saskaitāmo $\pm|X|$ domāsim kā kopas X elementu skaitīšanu ar atbilstošo zīmi.

Pierādīsim, ka katrs elements, kas pieder vismaz vienai kopai A_i, labajā pusē tiek skaitīts tieši vienu reizi, tas nozīmēs, ka ir spēkā pierādāmā vienādība.

Pieņemsim, ka elements a pieder tieši k kopām $A_i, 1 \leq k \leq n$. Atzīmēsim, ka tas nozīmē, ka

- a pieder C_k^2 divu kopu A_i šķēlumiem,
- a pieder C_k^3 trīs kopu A_i šķēlumiem,

... ...,

- a pieder C_k^m m kopu šķēlumiem,

... ...,

- a pieder vienam $(1 = C_k^k)$ k kopu šķēlumam.

Cik reizes šis elements a tiek skaitīts formulas labajā pusē?

- Pirmajā summā tas tiek skaitīts $k = C_k^1$ reizes,
- otrajā summā tas tiek skaitīts C_k^2 reizes ar $-$ zīmi (vienu reizi katrā no $A_i \cap A_j$ tipa šķēlumiem),

  ...,
- m-tajā summā tas tiek skaitīts C_k^m reizes ar zīmi $(-1)^{m-1}$ (vienu reizi katrā no šķēlumiem, kuram tas pieder),

...

Tātad kopā elements tiek skaitīts

$$C_k^1 - C_k^2 + C_k^3 - ... = 1 - (1 - C_k^1 + C_k^2 - ...) = 1 - (1-1)^k = 1$$

reizes.

Redzam, ka katrs elements pierādāmās formulas labajā pusē tiek skaitīts tieši vienu reizi un teorēma ir pierādīta. $\mathcal{QED}$

1.1. piezīme. Vēl viens veids kā pierādīt IIF balstās uz apakškopas raksturīgās funkcijas (bitu vektora) jēdzienu. Atcerēsimies, ka par kopas $S \subseteq U$ raksturīgo funkciju sauc funkciju $\chi_S : U \to \{0, 1\}$, kas definēta ar nosacījumu

$$\chi_S(a) = \begin{cases} 1, & \text{ja } a \in S, \\ 0, & \text{ja } a \notin S. \end{cases}$$

Ievērosim, ka galīgai kopai A izpildās formula

$$|A| = \sum_{a \in A} \chi_A(a).$$

Ievērosim, ka

$$\chi_{A \cap B}(a) = \chi_A(a)\chi_B(a),$$
$$\chi_{\bar{A}}(a) = 1 - \chi_A(a).$$

Atcerēsimies kopu dualitātes likumu

$$\overline{\bigcup_{i \in U} A_i} = \bigcap_{i \in U} \bar{A}_i,$$

no kuras seko raksturīgo funkciju vienādība

$$1 - \chi_A(a) = \prod_{i \in U} (1 - \chi_{A_i}(a)),$$

kur $A = \bigcup_{i \in U} A_i$. Atverot iekavas labajā pusē un sagrupējot saskaitāmos atbilstoši kopas U apakškopām iegūsim vienādību

$$1 - \chi_A(a) = \sum_{I \subseteq U} ((-1)^{|i|} \prod_{j \in I} \chi_{A_j}(a)) = 1 - \sum_{\emptyset \neq I \subseteq U} (-1)^{|I|+1} \chi_{A_I}(a)$$

vai

$$\chi_A(a) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq U} (-1)^{|I|+1} \chi_{A_I}(a).$$

Apskatot kreisās un labās puses funkciju vērtības punktā a un summējot pa visām vērtībām $a \in A$ iegūsim IIF.

1.3. Nevienādības

IIF labās puses dažus pirmos locekļus var izmantot kreisās puses novērtēšanai no vienas vai otras puses.

Piemēram, var redzēt, ka

$$|A_1 \cup ... \cup A_n| \leq \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

(*Būla nevienādība*), tāpēc ka nevienādības labās puses summā apvienojuma elementi, kas pieder vairāk kā vienai kopai, tiek skaitīti vairāk kā vienu reizi.

Otrs piemērs -

$$|A_1 \cup ... \cup A_n| \geq \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$$

(*Bonferroni nevienādība*), šī nevienādība ir spēkā, tāpēc ka labajā pusē apvienojuma elementi, kas pieder tieši vienai vai tieši divām kopām, tiek skaitīti pareizi, bet elementi, kas pieder vairāk kā divām kopām, tiek skaitīti ar negatīvu zīmi.

1.1. piemērs. Kādam cilvēkam ir mētelis ar kopējo laukumu 1 un pieciem ielāpiem. Katra ielāpa laukums ir 1/2. Pierādīt, ka vismaz diviem ielāpiem kopīgais laukums pārsniedz 3/20.

Izrādās, ka Būla un Bonferroni nevienādības var vispārināt.

1.2. teorēma. Visiem nepāra naturāliem $k \leq n$ izpildās

$$|\bigcup_{i\in U} A_i| \leq \sum_{\emptyset\neq I\subseteq U, |I|\leq k} (-1)^{|I|+1}|A_I|.$$

Visiem pāra naturāliem $k \leq n$ izpildās

$$|\bigcup_{i\in U} A_i| \geq \sum_{\emptyset\neq I\subseteq U, |I|\leq k} (-1)^{|I|+1}|A_I|.$$

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs. Jāizmanto matemātiskā indukcija.■

1.4. Klasiski kombinatorikas uzdevumi, kurus var atrisināt ar IIF

1.4.1. Sirjektīvo funkciju skaits

Cik ir sirjektīvu funkciju no n elementus lielas kopas $A = \{1, ..., n\}$ uz m elementus lielu kopu $B = \{1, ..., m\}$?

Visu funkciju skaits no A uz B ir vienāds ar $A_m^n = m^n$.

Skaitīsim, cik ir nesirjektīvu funkciju. Apzīmēsim ar F_i to funkciju kopu, kuru attēls nesatur elementu $i \in B$ un ar F_I - to funkciju kopu, kuru attēls nesatur nevienu indeksu $i \in I \subseteq B$.

Var redzēt, ka

$$F_I = \bigcap_{i \in I} F_i.$$

Atradīsim elementu skaitu kopā F_I. Funkcijas no šīs kopas ir visas funkcijas no A uz $B \backslash I$, kuru skaits ir vienāds ar

$$A_{m-|I|}^n = (m - |I|)^n.$$

Visu nesirjektīvo funkciju kopa ir vienāda ar $\bigcup_{i\in B} F_i$, tāpēc ka katrai nesirjektīvai funkcijai attēlā trūkst vismaz viens kopas B elements.

Saskaņā ar ieslēgšanas-izslēgšanas principu iegūstam, ka

$$|\bigcup_{i\in B} F_i| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq B} (-1)^{|I|+1}|F_I| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq B} (-1)^{|I|+1}(m-|I|)^n.$$

Katram naturālam skaitlim i, $0 \leq i \leq m$ to apakškopu I skaits, kas apmierina nosacījumu $|I| = m$, ir vienāds ar C_m^i. Ņemot vērā šo faktu, mēs varam summā pārgrupēt saskaitāmos un pāriet uz summēšanas indeksu i:

$$|\bigcup_{i\in B} F_i| = \sum_{0<i\leq m} (-1)^{i+1} C_m^i (m-i)^n.$$

Ja visu funkciju skaits ir vienāds ar m^n un nesirjektīvo funkciju skaits tagad ir atrasts, tad sirjektīvo funkciju skaits ir vienāds ar

$$m^n - \sum_{0<i\leq m} (-1)^{i+1} C_m^i (m-i)^n = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i (m-i)^n.$$

Izdarot summēšanas indeksa substitūciju $i \to m - i$, iegūsim, ka sirjektīvu funkciju skaits ir vienāds arī ar

$$\sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i i^n.$$

Kā speciālgadījumu, kad $n = m$, iegūstam negaidītu formulu

$$n! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i (n-i)^n,$$

kas lieliski ilustrē principu "skaitīšana divos dažādos veidos".

1.2. piezīme. Katrai sirjektīvai funkcijai no n-kopas uz m-kopu var piekārtot n-kopas netukšu apakškopu sadalījuma virkni. Katrai šādai virknei atbilst n-kopas sadalījums. Katram sadalījumam atbilst $m!$ virknes. Tādējādi saskaņā ar dalīšanas likumu

$$S(n,m) = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i (m-i)^n$$

1.4.2. Permutācijas bez fiksētajiem punktiem

Cik ir tādu n elementu lielas kopas $\{1, ..., n\}$ permutāciju f, kas nesaglabā nevienu elementu (citiem vārdiem sakot, $f(x) \neq x, \forall x$, visi cikli ir ar garumu lielāku kā 1)?

Apzīmēsim ar U_n visu permutāciju kopu, ar F_n permutāciju bez fiksētiem punktiem kopu, ar G_n - to permutāciju kopu, kuras fiksē vismaz vienu elementu, ar A_i - to permutāciju kopu, kuras fiksē i-to elementu.

Redzam, ka

$$|U_n| = |F_n| + |G_n|,$$

tātad

$$|F_n| = |U_n| - |G_n|.$$

Redzam arī ka

$$G_n = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n,$$

tāpēc varam pielietot IIF.

Tā kā

$$|A_i| = (n-1)!,$$
$$|A_i \cap A_j| = (n-2)!,$$
$$...,$$
$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| = (n-k)!,$$

tad iegūstam, ka

$$|G_n| = |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} C_n^i (n-k)!$$

un

$$|F_n| = n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}$$

1.3. piezīme. Ievērosim, ka

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}$$

ir Teilora rindas parciālsumma funkcijai e^x, kad izvirzījuma punkts ir 0 un $x = -1$. Šajā gadījumā Teilora rinda ir alternējoša un tai var piemērot Leibnica teorēmu par alternējošām rindām. Redzam, ka

$$|\frac{n!}{e} - |F_n|| = n!|\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \frac{1}{i!} - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{1}{i!}| <$$

$$n!|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}| = \frac{1}{n+1} \leq 1/2,$$

ja $n \geq 1$. Tātad skaitlis $\frac{n!}{e}$ atšķiras no $|F_n|$ mazāk nekā par 1/2, un varam apgalvot, ka $|F_n|$ ir tuvākais veselais skaitlis attiecībā uz skaitli $\frac{n!}{e}$, citiem vārdiem sakot, $|F_n|$ var iegūt, noapaļojot $\frac{n!}{e}$.

2. 7.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

7.1 Cik veidos var izvietot virknē 2 identiskus sarkanus akmeņus, 3 identiskus zilus akmeņus un 4 identiskus zaļus akmeņus tā, lai nevienas krāsas akmeņi nav izvietoti nepārtraukti?

7.2 Cik ir nenegatīvu veselu atrisinājumu vienādojumam

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20,$$

kuriem izpildās nosacījums $x_i \leq 11$?

7.3 Aprēķināt $\sum_k \frac{1}{2^k}$, kur summēšana tiek veikta pa visiem naturāliem k, kuri nedalās ne ar vienu no skaitļiem 2,3 vai 5.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

7.4 Ar IIF palīdzību pierādīt formulas

(a) $C_n^m = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} C_{n-i}^{m-i} C_n^i$;

(b) $\sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_n^i C_{n-i}^{m-i} = 0$;

(c) $C_n^m = \sum_{i=m+1}^{n+1} (-1)^{i-m-1} C_{n+1}^i$.